# 有限要素法*

小山大介
koyama@im.uec.ac.jp
http://www.im.uec.ac.jp/~koyama/w.html
電気通信大学大学院　情報理工学研究科
情報・通信工学専攻

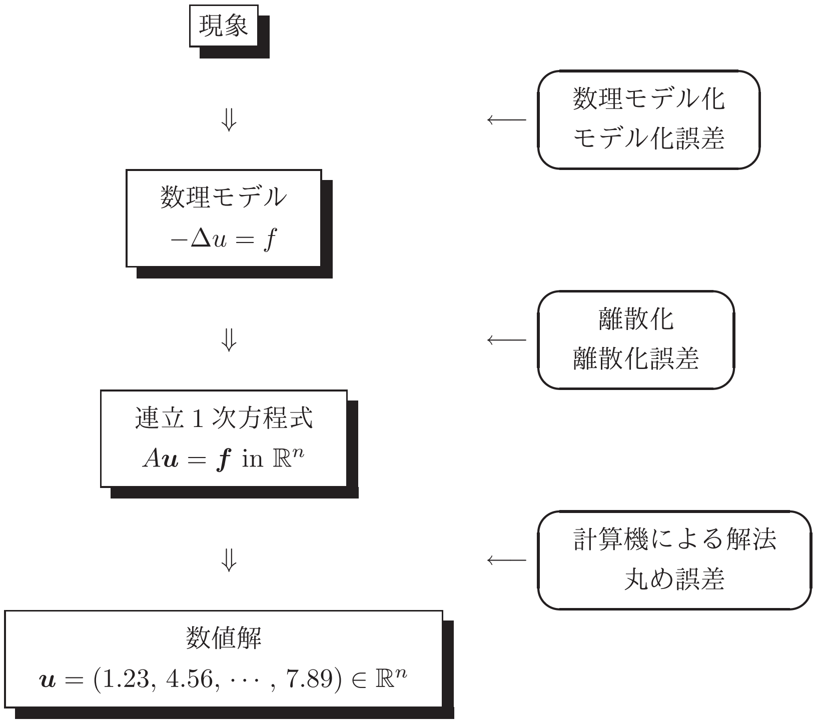
平成26年1月15日

## 目次

---

# 0　はじめに

## 0.1　現象の数値シミュレーション



本講義では，偏微分方程式の境界値問題の離散化手法として，有限要素法（Finite Element Method, FEM）を取り上げ，その算法の説明を行う[1]．さらに，その離散化誤差，すなわち，有限要素法の誤差の数理解析も行う．

## 0.2　有限要素法概観

### 0.2.1　有限要素法の特長（[4] からの引用）

1. 幾何学的柔軟性を持っており，任意形状領域の問題に適用できる．
2. 自然境界条件（Laplace 方程式の場合は Neumann 境界条件）の取扱いが容易である．
3. 手法の数学的正当化と誤差評価の研究が進んでいる．
4. 計算機向きの手法であり，汎用プログラムの作成が可能である．
5. 欠点：領域の要素分割（三角形分割，四面体分割等）が大変！

### 0.2.2　有限要素法の歴史

★ Courant の 1943 年の論文 [5] に有限要素法の原型が書かれている．

★ Turner, Clough, Martin, Topp の 1956 年の論文 [6] が有限要素法の工学分野における先駆的な論文と言われている．

★ 詳しい歴史については，Oden[7] を見よ．

---

[1] 有限要素法は初期値・境界値問題，固有値問題にも適用できる

# 第I部

# 有限要素法の算法

## 1　1次元有限要素法

次の常微分方程式の境界値問題を考える：

$$
(1)\quad \begin{cases} -u''(x) &=& f(x) \quad \text{in} \quad \Omega := (0,\,1), \\ u(0) &=& \alpha \qquad\qquad (\text{Dirichlet 境界条件}), \\ u'(1) &=& \beta. \qquad\qquad (\text{Neumann 境界条件}). \end{cases}
$$

これは，区間 $\Omega$ 上の関数 $f$ と実定数 $\alpha,\,\beta$ が与えられた時，(1) を満たす区間 $\Omega$ 上の関数 $u$ を見つける問題である．

**註記 1** 問題 (1) の解は，次のように与えられる：

$$
(2)\quad u(x) = \beta x + \alpha + \int_0^1 G(x,\,y) f(y)\,dy.
$$

ここで，Green 関数 $G(x,\,y)$ は，

$$
(3)\quad G(x,\,y) := \min\{x,\,y\}
$$

で与えられる．この時，(2) の右辺の積分を計算することは，$f$ が特別な場合を除き，難しい．　■

### 1.1　弱形式 (weak form)

問題 (1) の弱形式を求める．

区間 $\Omega$ 上の関数 $v$ で $v(0) = 0$ を満たす任意の関数を考える．これを (1) の微分方程式の両辺にかけて，$\Omega$ 上で積分すると次のようになる：

$$
-\int_0^1 u''(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx.
$$

左辺に部分積分を施し，$x = 1$ における境界条件と条件 $v(0) = 0$ を使うと，

$$
\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx + \beta v(1)
$$

を得る．

このことから，問題 (1) の弱形式は次のように定式化される：

$$
(4)\quad \begin{cases} \text{Find } u \text{ such that} \\ a(u,\,v) = F(v) \quad \forall v \text{ with } v(0) = 0, \\ u(0) = \alpha. \end{cases}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
a(u,\,v) &:= \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx, \\
F(v) &:= (f,\,v) + \beta v(1), \\
(f,\,g) &:= \int_0^1 f(x)g(x)\,dx,
\end{aligned}
$$

$v$ はテスト関数と呼ばれる．

以下の 1.1.1 節と 1.1.2 節で,「問題 (1) と問題 (4) の同値性」と「問題 (4) の解の一意性」について証明するが，数学的に少々厳密さを欠くことをあらかじめ断っておく．厳密な証明はいずれ述べる．

### 1.1.1　問題 (1) と問題 (4) の同値性

上述から，(1) の解は (4) の解になることが分る．逆に，(4) の解が (1) の解になることを示す．

関数 $u$ が (4) の解であるとする．この時，$v(0)=0$ を満たす滑らかな関数 $v$ に対して，(4) の第一式の左辺に部分積分を施すと，

$$(5)\quad u'(1)v(1)-\int_0^1 u''(x)v(x)\,dx=\int_0^1 f(x)v(x)\,dx+\beta v(1)$$

となる．さらに，関数 $v$ に対して，$v(1)=0$ なる条件を課すと，

$$\int_0^1 \left(-u''(x)-f(x)\right)v(x)\,dx=0$$

となり，$v$ の任意性から，

$$-u''(x)-f(x)\equiv 0\quad \text{in}\quad \Omega$$

となることが分る．これより，$u$ は (1) の第一式を満たすことが分る．これを (5) に代入すると，$v(0)=0$ を満たす任意の関数 $v$ に対して，

$$u'(1)v(1)=\beta v(1)$$

が成り立つ．$v(1)$ の任意性から，(1) の第三式（Neumann 条件）を満たされることが分る．

(1) の第二式（Dirichlet 条件）を満たされることは，(4) の第二式として，記述されているので，明らかである．

以上より，(4) の解が (1) の解になることが分った．

### 1.1.2　問題 (4) の解の一意性

$f=0, \alpha=0, \beta=0$ の時に，$u\equiv 0$ であることを示せば良い．この時，$v=u$ と選ぶと，

$$\int_0^1 \left|u'(x)\right|^2\,dx=0$$

となので，$u$ は定数となる．ここで，$u(0)=0$ だから，$u\equiv 0$ となる．

### 1.1.3　問題 (4) の解の存在

関数解析的枠組で後で証明する[2]．

### 1.1.4　自然境界条件と基本境界条件

弱形式において，$u$ や $v$ に課される境界条件を**基本境界条件**と呼び．弱形式において明示されなくとも，弱形式の解 $u$ が自動的に満たす境界条件を**自然境界条件**と呼ぶ．弱形式 (4) では，Dirichlet 境界条件 $u(0)=\alpha$ は基本境界条件であり，Neumann 境界条件 $u'(1)=\beta$ は自然境界条件である．(演習問題 2 も参考にせよ．)

**演習問題 2**　4 階常微分方程式の境界値問題：

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{d^4u}{dx^4}(x)=f(x) \quad \text{in} \quad \Omega:=(0,1), \\ u(0)=u(1)=\dfrac{du}{dx}(0)=\dfrac{du}{dx}(1)=0. \end{cases}$$

---

[2] (2) で適当な条件を満たす $f$ に対しては，$u$ が $C^2$ 級になって，微分方程式の解となり，問題 (4) の解の存在を示すことができる．

この問題は，両端で固定支持された梁に荷重 $f$ がかかった時、その梁の曲げを求める問題である．この問題の弱形式が次で定式化されることを確認せよ：

$$(7)\quad \begin{cases} \text{Find } u \text{ such that} \\ a(u,\,v) = F(v) \quad \forall v \text{ with } v(0) = v(1) = \dfrac{dv}{dx}(0) = \dfrac{dv}{dx}(1) = 0, \\ u(0) = u(1) = \dfrac{du}{dx}(0) = \dfrac{du}{dx}(1) = 0. \end{cases}$$

ここで，

$$\begin{aligned} a(u,\,v) &:= \int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2}(x)\frac{d^2v}{dx^2}(x)\,dx, \\ F(v) &:= \int_0^1 f(x)v(x)\,dx. \end{aligned}$$

この問題において，$u(0) = u(1) = \frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(1) = 0$ は基本境界条件である．

さらに，境界条件が

$$u(0) = u(1) = \frac{d^2u}{dx^2}(0) = \frac{d^2u}{dx^2}(1) = 0$$

となった場合には弱形式はどのようになるか? この時，$\frac{d^2u}{dx^2}(0) = \frac{d^2u}{dx^2}(1) = 0$ は自然境界条件になることに注意せよ．

## 1.2 Galerkin 法

問題 (1) の厳密解を求めるのは $f$ が特別な場合を除き困難なので，その近似解を求めることを考える．(2) の右辺の積分を数値積分するということも考えられるが，ここでは，問題 (1) の近似方程式を定式化し，それを解く方法を考える．

問題 (1) の近似方程式を導く一つの方法として，**Galerkin 法**がある．この方法では弱形式 (4) を用いる．

区間 $\Omega$ 上の関数で非斉次 Dirichlet 境界条件を満たす関数 $\psi$ ($\psi(0) = \alpha$) を任意にとって固定する．次に $\Omega$ 上の互いに一次独立な関数で斉次 Dirichlet 境界条件を満たす関数 $\varphi_j$ ($\varphi_j(0) = 0$) $(1 \le j \le N)$ を任意にとって固定する．この時，問題 (1) の近似解は，

$$\hat{u}(x) = \psi(x) + \sum_{j=1}^{N} u_j\varphi_j(x)$$

なる形であることを要請する．ここで，$u_j$ $(1 \le j \le N)$ は未定係数である．関数 $\varphi_j$ $(1 \le j \le N)$ を Galerkin 法の**基底関数**と呼ぶ．この時，$\hat{u}(0) = \alpha$ となり，$\hat{u}$ は問題 (1) の Dirichlet 境界条件を満たすことに注意せよ．

問題 (1) の近似問題を次のように設定する:

$$(8)\quad \begin{cases} \text{Find } \hat{u}(x) = \psi(x) + \sum_{j=1}^{N} u_j\varphi_j(x) \text{ such that} \\ a(\hat{u},\,v) = F(v) \qquad v = \varphi_i \quad (1 \le \forall i \le N). \end{cases}$$

この近似問題は次のように書き換えることができる:

$$(9)\quad \begin{cases} \text{Find } [u]_{1 \le j \le N} \in \mathbb{R}^N \text{ such that} \\ a\left(\psi + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} u_j\varphi_j,\, \varphi_i\right) = F(\varphi_i) \quad (1 \le \forall i \le N). \end{cases}$$

この問題は次の連立一次方程式の形に書ける:

$$(10)\quad \begin{bmatrix} a(\varphi_1,\,\varphi_1) & a(\varphi_2,\,\varphi_1) & \cdots & \cdots & a(\varphi_N,\,\varphi_1) \\ a(\varphi_1,\,\varphi_2) & a(\varphi_2,\,\varphi_2) & \cdots & \cdots & a(\varphi_N,\,\varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a(\varphi_1,\,\varphi_N) & a(\varphi_2,\,\varphi_N) & \cdots & \cdots & a(\varphi_N,\,\varphi_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(\varphi_1) - a(\psi,\,\varphi_1) \\ F(\varphi_2) - a(\psi,\,\varphi_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ F(\varphi_N) - a(\psi,\,\varphi_N) \end{bmatrix}.$$

これを

(11) $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$

と書く．$A$ を係数行列（剛性行列），$\boldsymbol{u}$ を未知（量）ベクトル，$\boldsymbol{f}$ を右辺ベクトル（自由項ベクトル，外力項ベクトルなど）と呼ぶ．

**命題 3** 方程式 (11) の係数マトリックス $A$ は正定値対称行列になる．

**証明．** 対称行列になることは明らか．任意の $\boldsymbol{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_N]^T \in \mathbb{R}^N$ に対して，

$$(12)\quad (A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{R}^N} = \sum_{i,j=1}^{N} a(\varphi_j, \varphi_i) v_j v_i = a\left(\sum_{j=1}^{N} v_j \varphi_j, \sum_{j=1}^{N} v_i \varphi_i\right) = \int_0^1 \left| \frac{d}{dx}\left(\sum_{j=1}^{N} v_j \varphi_j\right)\right|^2 dx \geq 0.$$

これより，$A$ は非負値行列であることが分る．$A$ の正定値性を示すために，$(A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{R}^N} = 0$ を仮定すると，

$$(13)\quad \sum_{j=1}^{N} v_j \varphi_j(x) \equiv \text{定数}$$

となることが分る．また，$x = 0$ では，

$$\sum_{j=1}^{N} v_j \varphi_j(0) = 0$$

であるから，(13) は

$$\sum_{j=1}^{N} v_j \varphi_j(x) \equiv 0$$

となる．$\varphi_j$ $(1 \leq j \leq N)$ の一次独立性から，$v_j = 0$ $(1 \leq j \leq N)$ を得る．このことから $A$ が正定値であることが分る．■

**註記 4** 命題 3 より，$A$ は正則，すなわち，方程式 (11) の解は一意的に存在する．このことは，Galerkin 法で得られた近似問題 (8) の解が一意的に存在することを示している．■

## 1.3 1 次元有限要素モデル

区間 $\Omega$ を図 1 のように分割する．分割によってできた各副区間 $K_i := (x_{i-1}, x_i)$ $(1 \leq i \leq N)$ を**有限要素**（finite

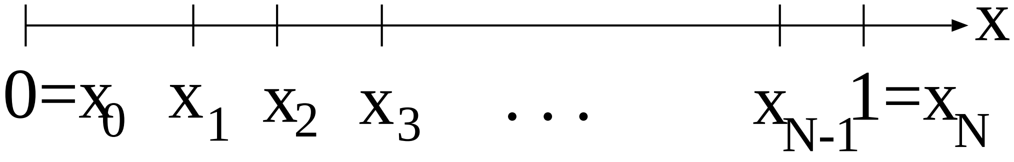


図 1: 区間 $\Omega = (0, 1)$ の分割．

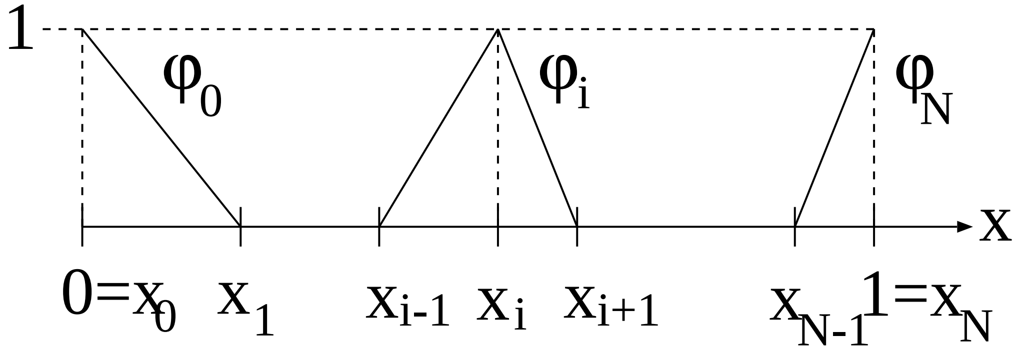


図 2: 区分 1 次基底関数.

element)，または，単に**要素**と呼ぶ．また，分割点を**節点** (node) と呼ぶ．

次の区分 1 次連続関数を考える．

$$\varphi_0(x) := \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & \text{if } x \in K_1, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{14}$$

$$\varphi_i(x) := \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{if } x \in K_i, \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{if } x \in K_{i+1}, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \quad (1 \le i \le N-1), \tag{15}$$

$$\varphi_N(x) := \begin{cases} \dfrac{x - x_{N-1}}{x_N - x_{N-1}} & \text{if } x \in K_N, \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases} \tag{16}$$

ここで，$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ $(0 \le i,\, j \le N)$ が成り立ち，$\varphi_i$ $(0 \le i \le N)$ は互いに 1 次独立であることに注意せよ．

**註記 5** 区間 [0, 1] 上の関数 $v$ が与えられた時，

$$\sum_{i=0}^{N} v(x_i)\varphi_i(x)$$

は，$v$ の区分 1 次 Lagrange 補間関数になる． ■

第 1.2 節で述べた Galerkin 法で、その基底関数を上記の区分 1 次関数 $\varphi_j$ $(1 \le j \le N)$ で選んだ時，特に**有限要素法**と呼ばれる．さらに，$\psi = \alpha\varphi_0$ と選ぶと，連立 1 次方程式 (10) の係数行列 $A$ と右辺ベクトル $\boldsymbol{f}$ のそれぞれの成分を具体的に計算することができる．以下にそれを示す．

**註記 6** 基底関数 $\varphi_j$ は折れ線関数なので，節点上で通常の意味での微分をすることはできないが，微分を**超関数**の意味でとらえると，導関数が定義できる．超関数については後述するが，$\varphi_j$ は節点で連続なので，その超関数（の意味での）微分による導関数は各要素で通常の微分をすることによって得られる．例えば，

$$\frac{d\varphi_i}{dx}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x_i - x_{i-1}} & \text{if } x \in K_i, \\ -\dfrac{1}{x_{i+1} - x_i} & \text{if } x \in K_{i+1}, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \quad (1 \le i \le N-1)$$

となり，不連続な区分定数関数になる． ■

まず，

$$a(\varphi_j,\, \varphi_i) = 0 \quad \text{for} \quad |i - j| \ge 2$$

となることに注意すると，$A$ は三重対角行列になることが分る．すなわち，

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{N-2,N-1} & a_{N-1,N-1} & a_{N-2,N-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{N,N-1} & a_{N,N} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

ここで，$a_{i,j} := a(\varphi_j, \varphi_i)$ である．

また，$\boldsymbol{f}$ は次のようになる：

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} (f, \varphi_1) - \alpha a(\varphi_0, \varphi_1) \\ (f, \varphi_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ (f, \varphi_{N-1}) \\ (f, \varphi_N) + \beta \end{bmatrix}. \tag{18}$$

行列 $A$ の非零成分は積分を計算することによって次のようになる：

$$a_{i,i} = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \quad (1 \leq i \leq N-1), \tag{19}$$

$$a_{N,N} = \frac{1}{x_N - x_{N-1}}, \tag{20}$$

$$a_{i,i+1} = -\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \quad (0 \leq i \leq N-1). \tag{21}$$

ここで，$a_{0,1}$ は $\boldsymbol{f}$ の第一成分を計算する時に用いることができる．

関数 $f$ が定数関数：

$$f(x) \equiv \bar{f} \tag{22}$$

の時には，

$$(f, \varphi_i) = \frac{\bar{f}}{2}(x_{i+1} - x_{i-1}) \quad (1 \leq i \leq N-1), \tag{23}$$

$$(f, \varphi_N) = \frac{\bar{f}}{2}(x_N - x_{N-1}) \tag{24}$$

となる．

**演習問題 7** 上記 (19)–(21) と (23), (24) を確認せよ．

## 1.4 差分法との関係

一方，問題 (1) に対する一つの差分法による近似方程式は以下で与えられる：各節点 $x_i$ $(1 \leq i \leq N)$ において，問題 (1) の 2 階微分を 2 階中心差分[3] で近似することによって，

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f(x_i) \tag{25}$$

なる差分方程式が得られる．ここで，$i = 1$ の時，$u_0$ が現れるが，

$$u_0 = \alpha \tag{26}$$

---

[3] $u$ が $x_i$ の近傍で $C^4$ 級の時，$\dfrac{d^2u}{dx^2}(x_i) - \dfrac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2} = O(h^2)$ $(h \longrightarrow 0)$ が成り立つ．

とする．また $i = N$ の時，$u_{N+1}$ が現れるが，区間 $\Omega$ の外に仮想的に $x_{N+1} = 1 + h$ という節点を導入し，$u_{N+1}$ をその上での値と考える．このように補助的な変数 $u_{N+1}$ を導入することによって，$x = 1$ での Neumann 境界条件を次の 1 階中心差分[4] で近似することができる：

$$\frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2h} = \beta. \tag{27}$$

**命題 8** 問題 (1) の $f$ は定数関数 ($f(x) \equiv \bar{f}$) であるとする．区間 $\Omega = (0, 1)$ を $N$ 等分し，その刻み幅を $h := 1/N$ とする．この時，有限要素法によって得られる近似方程式，すなわち，

$$A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \tag{28}$$

の $A$ と $\boldsymbol{f}$ はそれぞれ (17) と (18) で与えられる連立一次方程式と差分法によって得られる近似方程式：

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f(x_i) \qquad (1 \le i \le N), \tag{29a}$$

$$u_0 = \alpha, \tag{29b}$$

$$\frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2h} = \beta \tag{29c}$$

は同値である．すなわち，両方程式から得られる $u_1, u_2, \ldots, u_N$ は一致する．

**証明．** 区間 $\Omega = (0, 1)$ を $N$ 等分し，刻み幅を $h := 1/N$ する時，行列 $A$(17) とベクトル $\boldsymbol{f}$ (18) はそれぞれ次のようになる:

$$A = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{f} = \bar{f}h\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha/h \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}.$$

この時，(28) の第 $i$ 行目 $(2 \le i \le N-1)$ の方程式は

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = \bar{f}$$

となる．

次に，(29b) のもとで，(28) の第 1 行目 $\Longleftrightarrow$ (29a)$_{i=1}$ を示す．(28) の第 1 行目は，

$$\frac{2u_1 - u_2}{h^2} = \bar{f} + \frac{\alpha}{h^2}$$

であり，これと (29b) から，$\alpha$ を消去すると，(29a)$_{i=1}$ が得られる．逆も成り立つ．

最後に，(29c) のもとで，(28) の第 $N$ 行目 $\Longleftrightarrow$ (29a)$_{i=N}$ を示す．

(28) の第 $N$ 行目は，

$$\frac{-u_{N-1} + u_N}{h} = \frac{\bar{f}}{2}h + \beta. \tag{30}$$

これと (29c) から，$\beta$ を消去すると，(29a)$_{i=N}$ が得られる．逆も成り立つ． ■

---

[4] $u$ が $x_i$ の近傍で $C^3$ 級の時，$\dfrac{du}{dx}(x_i) - \dfrac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} = O(h^2)$ $(h \longrightarrow 0)$ が成り立つ．

**註記 9** 差分法で，補助変数 $u_{N+1}$ を導入しないで，Neumann 条件 (29c) を次のように近似することもできる：

$$\frac{u_N - u_{N-1}}{h} = \beta. \tag{31}$$

ここでは，Neumann 条件に現れる 1 階微分は，いわゆる後退差分で近似されている．ここで，後退差分は 1 次精度である．すなわち，$u$ が $x_i$ の近傍で $C^1$ 級の時，

$$\frac{du}{dx}(x_i) - \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h} = O(h) \quad (h \longrightarrow 0).$$

補助変数 $u_{N+1}$ を導入し (29c) のように 1 階微分を中心差分で近似した時よりも，その近似の精度が落ちる．実際，(29a)–(29c) で得られる近似解の精度は $O(h^2)$[5]であるが，(29a), (29b), (31) で得られる近似解の精度は $O(h^1)$ となる（証明は森 [8] 等を参考にせよ）． ■

## 1.5 補足

**演習問題 10** 次の常微分方程式の境界値問題を考える：

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -u''(x) + u(x) &=& f(x) \quad \text{in} \quad \Omega := (0,\, 1), \\ u'(0) &=& 0, \\ u'(1) &=& 0. \end{array} \right. \tag{32}$$

この問題の弱形式は

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Find } u \text{ such that} \\ a(u,\, v) = F(v) \quad \forall v. \end{array} \right. \tag{33}$$

で与えられることを示せ．ただし，

$$\begin{array}{rcl} a(u,\, v) &:=& \displaystyle\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx + \int_0^1 u(x)v(x)\,dx, \\ F(v) &:=& \displaystyle\int_0^1 f(x)v(x)\,dx \end{array}$$

である．また，Galerkin 法において，(14)–(16) で定義される区分 1 次基底関数を用いた時に得られる連立 1 次方程式は，次で与えられることを示せ：

$$(A + B)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}.$$

---

[5] $\exists C$ and $\exists \bar{h} > 0$ s.t. $\max_{1 \le j \le N} |u(x_j) - u_j| \le Ch^2 \ \forall h \le \bar{h}$ が成り立つということ．ここで，$h := \max_{1 \le j \le N} h_j$ である．

ここで，

$$
A = \begin{bmatrix}
a_{0,0} & a_{0,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & a_{N-2,N-1} & a_{N-1,N-1} & a_{N-2,N-1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{N,N-1} & a_{N,N}
\end{bmatrix} \quad \text{with} \quad a_{i,j} := a(\varphi_j,\, \varphi_i),
$$

$$
B = \begin{bmatrix}
b_{0,0} & b_{0,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
b_{1,0} & b_{1,1} & b_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & b_{N-2,N-1} & b_{N-1,N-1} & b_{N-2,N-1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & b_{N,N-1} & b_{N,N}
\end{bmatrix} \quad \text{with} \quad b_{i,j} := (\varphi_j,\, \varphi_i),
$$

$$
\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix}
(f,\, \varphi_0) \\
(f,\, \varphi_1) \\
(f,\, \varphi_2) \\
\vdots \\
\vdots \\
(f,\, \varphi_{N-1}) \\
(f,\, \varphi_N)
\end{bmatrix}.
$$

さらに，

$$
b_{0,0} = \frac{1}{3}x_1, \tag{34}
$$

$$
b_{i,i} = \frac{1}{3}(x_{i+1} - x_{i-1}), \quad (1 \le i \le N-1), \tag{35}
$$

$$
b_{N,N} = \frac{1}{3}(x_N - x_{N-1}), \tag{36}
$$

$$
b_{i,i+1} = \frac{1}{6}(x_{i+1} - x_i) \quad (0 \le i \le N-1) \tag{37}
$$

で与えられることを示せ．

行列 $A$ および $B$ はそれぞれ剛性行列および質量行列と呼ばれることがある．

### 1.5.1 長さ座標

区間 $(x_1,\, x_2)$ 上の長さ座標 $(\lambda_1,\, \lambda_2)$ を次で定義する：

$$
\lambda_1(x) := \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1},
$$

$$
\lambda_2(x) := \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.
$$

次が成立する：

$$
x = x_1\lambda_1(x) + x_2\lambda_2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},
$$

$$
\lambda_1(x) + \lambda_2(x) \equiv 1 \quad \forall x \in \mathbb{R},
$$

$$
\int_{x_1}^{x_2} \lambda_1^l(x)\lambda_2^m(x)\, dx = \frac{l!m!}{(l+m+1)!}(x_2 - x_1) \quad \forall l, \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{38}
$$

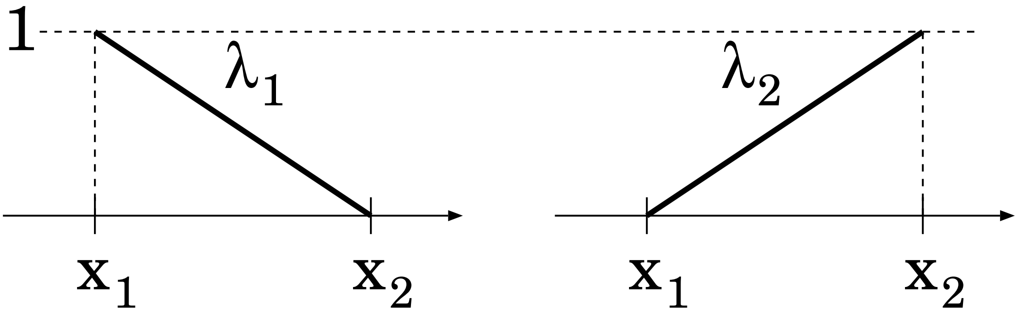


図 3: 長さ座標 $\lambda_1$, $\lambda_2$.

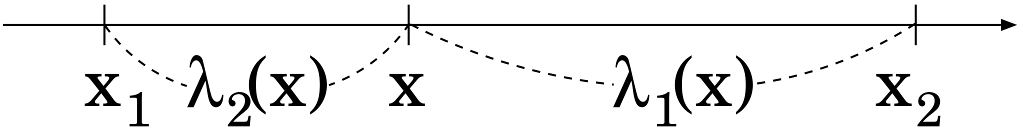


図 4: 点 $x$ は線分 $x_1x_2$ を $\lambda_2(x) : \lambda_1(x)$ に内分する．

任意の $x \in \mathbb{R}$ は線分 $x_1x_2$ を $|\lambda_2(x)| : |\lambda_1(x)|$ に内分または外分する．

各要素 $K_i = (x_{i-1},\, x_i)$ $(1 \le i \le N)$ で長さ座標 $\lambda_1^{K_i}$, $\lambda_2^{K_i}$ を考えると，

$$\varphi_{i-1}|_{K_i} = \lambda_1^{K_i}, \quad \varphi_i|_{K_i} = \lambda_2^{K_i}$$

となるので，積分公式 (38) を使って，質量行列の成分計算ができる：

$$\begin{aligned}
b_{i,i} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\lambda_2^{K_i}(x)\right]^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\lambda_1^{K_{i+1}}(x)\right]^2 dx \\
&= \frac{0!2!}{(0+2+1)!}(x_i - x_{i-1}) + \frac{2!0!}{(2+0+1)!}(x_{i+1} - x_i) \\
&= \frac{1}{3}(x_{i+1} - x_{i-1}), \\
b_{i,i+1} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \lambda_1^{K_{i+1}}(x)\lambda_2^{K_{i+1}}(x)\, dx \\
&= \frac{1!1!}{(1+1+1)!}(x_{i+1} - x_i) \\
&= \frac{1}{6}(x_i - x_{i-1}).
\end{aligned}$$

積分公式 (38) は，より高次の基底関数を用いた時，その係数行列の成分計算に有用である．

**演習問題 11** 問題 (4) の解を $u$ とし，$u$ の区分 1 次ラグランジュ補間を $\tilde{u}$ とする．すなわち，

$$\tilde{u}(x) := \sum_{j=0}^{N} u(x_j)\varphi_j(x).$$

ここで，$\varphi_j$ $(0 \le j \le N)$ は (14)–(16) で定義される区分 1 次基底関数である．この時，$\tilde{u}$ は (8) で $\psi = \alpha\varphi_0$ とした時の解となることを示せ．

このことは，もし積分 $\int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\,dx$ $(1 \le i \le N)$ が正確に計算できたときには，有限要素解は節点上で厳密解に一致することを示している．

## 2 Poisson 方程式に対する有限要素法

次の Poisson 方程式の混合境界値問題を考える：

$$
\text{(39)}\quad \begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= g_D \quad \text{on} \quad \Gamma_D \quad (\text{Dirichlet 境界条件}), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} &= g_N \quad \text{on} \quad \Gamma_N \quad (\text{Neumann 境界条件}). \end{cases}
$$

ここで，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ は有界領域，$\Omega$ の境界 $\partial\Omega$ は 2 つの部分 $\Gamma_D$ と $\Gamma_N$ に分けられているものとする：$\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$．さらに，$n$ は境界上の外向き単位法線ベクトルとする．(図 5 参照.)

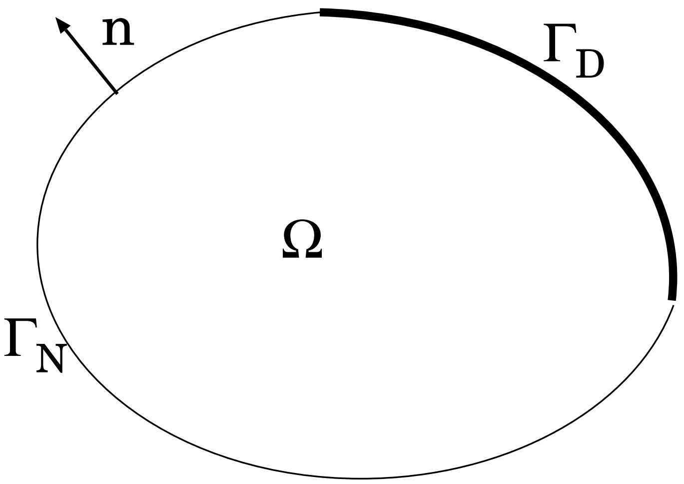


図 5: 領域 $\Omega$ とその境界 $\Gamma_D$, $\Gamma_N$.

### 2.1 弱形式

問題 (39) の弱形式を定式化するために，Green の公式が必要である：

$$
\text{(40)}\quad \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} u v n_i\, d\gamma - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, d\boldsymbol{x} \quad (1 \le i \le d).
$$

領域 $\Omega$ 上の関数 $v$ で境界 $\Gamma_D$ 上で $v = 0$ を満たす任意の関数を考える．これを (39) の微分方程式の両辺にかけて，$\Omega$ 上で積分すると次のようになる：

$$
-\int_\Omega \Delta u v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f v\, d\boldsymbol{x}.
$$

左辺に Green の公式 (40) を適用し，境界 $\Gamma_N$ における境界条件と境界 $\Gamma_D$ 上で $v = 0$ という条件を使うと，

$$
\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f v\, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_N} g_N v\, d\gamma
$$

を得る．

このことから，問題 (39) の弱形式は次のように定式化される：

$$
\text{(41)}\quad \begin{cases} \text{Find } u \text{ such that} \\ a(u, v) = F(v) \quad \forall v \text{ with } v = 0 \text{ on } \Gamma_D, \\ u = g_D \text{ on } \Gamma_D. \end{cases}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
a(u,\, v) \quad &:= \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x}, \\
F(v) \quad &:= \quad (f,\, v) + [g_N,\, v], \\
(f,\, g) \quad &:= \quad \int_\Omega fg \, d\boldsymbol{x}, \\
[u,\, v] \quad &:= \quad \int_{\Gamma_N} uv \, d\gamma.
\end{aligned}
$$

### 2.1.1　問題 (39) と問題 (41) の同値性

上述から，(39) の解は (41) の解になることが分る．逆に，(41) の解が (39) の解になることを示す．

関数 $u$ が (41) の解であるとする．この時，境界 $\Gamma_D$ 上で $v = 0$ を満たす滑らかな関数 $v$ に対して，(41) の第一式の左辺に Green の公式 (40) を適用すると，

$$
(42) \quad \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\gamma - \int_\Omega \Delta uv \, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega fv \, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_N} g_N v \, d\gamma
$$

となる．さらに，関数 $v$ に対して，境界 $\Gamma_N$ 上で $v = 0$ なる条件を課すと，

$$
\int_\Omega (-\Delta u - f) \, v \, d\boldsymbol{x} = 0
$$

となり，$v$ の任意性から，

$$
-\Delta u - f \equiv 0 \quad \text{in} \quad \Omega
$$

となることが分る．これより，$u$ は (39) の第一式を満たすことが分る．これを (42) に代入すると，境界 $\Gamma_D$ 上で $v = 0$ を満たす関数 $v$ に対して，

$$
\int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\gamma = \int_{\Gamma_N} g_N v \, d\gamma
$$

が成り立つ．$v$ の $\Gamma_N$ 上での任意性から，(39) の第三式（Neumann 条件）を満たされることが分る．

(39) の第二式（Dirichlet 条件）を満たされることは，(41) の第二式として，記述されているので，明らかである．

以上より，(41) の解が (39) の解になることが分った．

### 2.1.2　問題 (41) の解の一意性

$f = 0,\, g_D = 0,\, g_N = 0$ の時に，$u \equiv 0$ であることを示せば良い．この時，$v = u$ と選ぶと，

$$
\int_\Omega |\nabla u|^2 \; d\boldsymbol{x} = 0
$$

となので，$u$ は定数となる．ここで，境界 $\Gamma_D$ 上で $u = 0$ だから，$u \equiv 0$ となる．

### 2.1.3　問題 (41) の解の存在

関数解析的枠組で後で証明する．

### 2.1.4　自然境界条件と基本境界条件

弱形式 (41) では，Dirichlet 境界条件：$u = g_D$ は基本境界条件であり，Neumann 境界条件：$\frac{\partial u}{\partial n} = g_N$ は自然境界条件である．

**演習問題 12** 重調和方程式の境界値問題：

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{43}$$

この問題は，全周で固定された板に荷重 $f$ がかかった時、その板の曲げを求める問題である．この問題の弱形式が次で定式化されることを確認せよ：

$$\begin{cases} \text{Find } u \text{ such that} \\ a(u,\, v) = F(v) \quad \forall v \text{ with } v = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{44}$$

ここで，

$$\begin{aligned} a(u,\, v) &:= \int_\Omega \Delta u \Delta v \, d\boldsymbol{x}, \\ F(v) &:= \int_\Omega f v \, d\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

この問題において，$\partial\Omega$ における境界条件 $u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ は基本境界条件である．

## 2.2　2 次元有限要素モデル

区間 $\Omega$ を図 6 のように三角形分割する．各三角形 $K_m$ $(m = 1,\, \ldots,\, M)$ を三角形要素と呼ぶ．有限要素あるいは単に要素と呼ぶこともある．また，三角形の頂点 $\boldsymbol{q}_n$ $(n = 1,\, \ldots,\, \widetilde{N})$ を節点と呼ぶ．領域 $\Omega$ が多角形でない時は，$\widehat{\Omega} := \bigcup_{m=1}^{M} K_m$ は $\Omega$ の近似領域になる．以後，$\boldsymbol{x} = (x,\, y) \in \mathbb{R}^2$ と書くこともある．

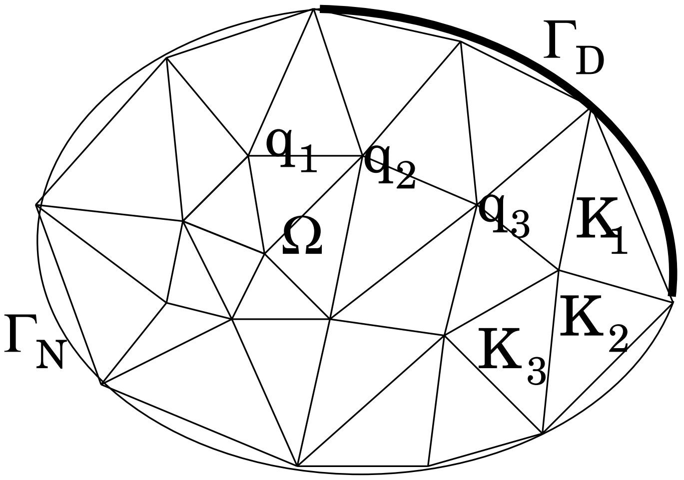


図 6: 領域 $\Omega$ の三角形分割. (要素数 $M = 28$, 節点数 $\widetilde{N} = 20$.)

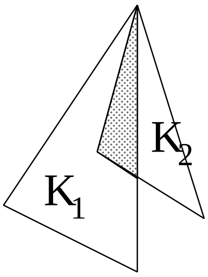


図 7: 二つの三角形要素が重なってしまう悪い例.

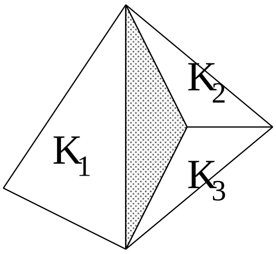


図 8: 三角形要素の間にすき間に空いてしまっている悪い例.

### 2.2.1 三角形分割する際の決まり

1. 三角形どうしは重ならない（図 7 参照）.
2. 三角形要素間にすき間を開けない（図 8 参照）.
3. 頂点が他の三角形の辺上にのらない（図 9 参照）.

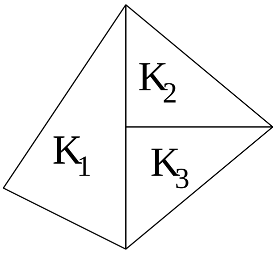


図 9: 三角形要素の頂点が他の三角形要素の辺上にのってしまっている悪い例.

4. 混合境界値問題の時は，$\Gamma_D$ と $\Gamma_N$ の接合点に節点をおく.（図 6 のように分割すれば良い.）

三角形分割に付随して，各 $i = 1, \ldots, \widetilde{N}$ に対して，$\widehat{\Omega}$ 上の区分 1 次連続関数 $\varphi_i$ を $\varphi_i(\boldsymbol{q}_j) = \delta_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq \widetilde{N})$ が満たされるように一意に定めることができる（図 10 参照）. この時，$\varphi_i$ $(1 \leq i \leq \widetilde{N})$ は互いに 1 次独立である.

**註記 13** 領域 $\Omega$ 上の関数 $v$ が与えられた時,

$$\sum_{i=1}^{\widetilde{N}} v(\boldsymbol{q}_i)\varphi_i(\boldsymbol{x})$$

は，$v$ の区分 1 次 Lagrange 補間関数になる.

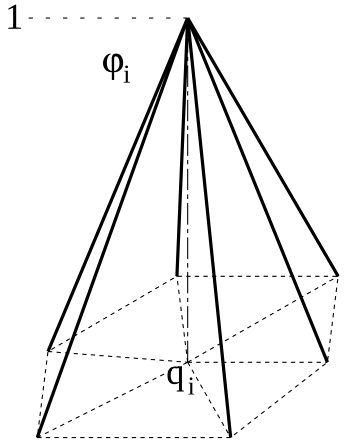


図 10: 節点 $\boldsymbol{q}_i$ に対応する区分 1 次基底関数 $\varphi_i$.

### 2.3 離散近似問題

まず，$\Omega$ の内部に含まれる節点の数を $N_i$, $\overline{\Gamma_D}$ 上の節点の数[6]を $N_d$, $\overset{\circ}{\Gamma}_N$ 上の節点の数を $N_n$ とする．この時，$\widetilde{N} = N_i + N_d + N_n$ となる．また，説明を簡単にするために，節点には次のように順番付けがなされているものとする：

$$
(45)\quad
\begin{array}{ll}
\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_{N_i}: & \Omega \text{ の内部に含まれる節点,} \\
\boldsymbol{q}_{N_i+1}, \ldots, \boldsymbol{q}_N: & \overset{\circ}{\Gamma}_N \text{ 上の節点,} \\
\boldsymbol{q}_{N+1}, \ldots, \boldsymbol{q}_{\widetilde{N}}: & \overline{\Gamma_D} \text{ 上の節点.}
\end{array}
$$

ここで，$N := N_i + N_n$ である.（実際の計算ではわざわざこのように番号付けする必要は無い.）

この時，第 1.2 節で述べた Galerkin 法における $\psi$ を

$$\psi(\boldsymbol{x}) := \sum_{j=N+1}^{\widetilde{N}} g_D(\boldsymbol{q}_j)\varphi_j(\boldsymbol{x}).$$

とする．$\psi$ は非斉次 Dirichlet データ $g_D$ を $\Gamma_D$ 上で近似する関数である．Galerkin 法の基底関数を $\varphi_j$ $(1 \le j \le N)$ と選ぶと，問題 (39) の近似問題として，次の問題を得ることができる：

$$
(46)\quad
\begin{cases}
\text{Find } \hat{u}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^N u_j\varphi_j(\boldsymbol{x}) + \psi(\boldsymbol{x}) \text{ such that} \\
a(\hat{u}, v) = \widehat{F}(v) \qquad v = \varphi_i \quad (1 \le \forall i \le N).
\end{cases}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
a(u, v) &:= \int_{\widehat{\Omega}} \nabla u \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x}, \\
\widehat{F}(v) &:= (f, v) + [\widehat{g}_N, v], \\
(f, g) &:= \int_{\widehat{\Omega}} f g \, d\boldsymbol{x}, \\
[u, v] &:= \int_{\widehat{\Gamma}_N} uv \, d\gamma,
\end{aligned}
$$

$u_j$ $(1 \le j \le N)$ は未定係数であり，$\widehat{\Gamma}_N$ は三角形分割によってできる $\Gamma_N$ の折れ線近似境界，また，$\widehat{g}_N$ は $g_N$ の適当な近似関数．例えば，$\sum_{j=N_i+1}^N g_N(\boldsymbol{q}_j)\varphi_j$ の $\widehat{\Gamma}_N$ への制限で与える．

この近似問題は次のように書き換えることができる:

$$
(47)\quad
\begin{cases}
\text{Find } [u]_{1\le j\le N} \in \mathbb{R}^N \text{ such that} \\
a\left(\displaystyle\sum_{j=1}^N u_j\varphi_j + \psi,\, \varphi_i\right) = \widehat{F}(\varphi_i) \quad (1 \le \forall i \le N).
\end{cases}
$$

---

[6] $\Gamma_D$ の端点の節点も含める

この問題は，第 1.2 節で示したように，連立一次方程式の形 $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ に書け，$A$ は $N$ 次の正方行列であり，その $(i,\, j)$ 成分 $a_{i,j}$ は，

$$a_{i,j} = a(\varphi_j,\, \varphi_i) \quad (1 \le i,\, j \le N)$$

となり，$\boldsymbol{f}$ は $N$ 次元ベクトルであり，その第 $i$ 成分 $f_i$ は，

$$\begin{aligned} f_i &= \widehat{F}(\varphi_i) - a\,(\psi,\, \varphi_i) \quad (1 \le i \le N) \\ &= \widehat{F}(\varphi_i) - \sum_{j=N+1}^{\widetilde{N}} g_D(\boldsymbol{q}_j) a\,(\varphi_j,\, \varphi_i) \quad (1 \le i \le N) \end{aligned} \tag{48}$$

となる（cf. (10)）.

## 2.4　係数行列の作成法（直接剛性法）

三角形分割の計算機の中でのデータによる表現方法とその三角形分割 (データ) から係数行列 $A$ と右辺ベクトル $\boldsymbol{f}$ を計算機の中で作成する方法について説明する．

### 2.4.1　三角形分割データ

三角形分割は次の表 1, 2 の二つのデータ表によって表現される．

表 1: 節点・座標対応表

| 節点番号 | 節点の $x$ 座標 | 節点の $y$ 座標 |
|---|---|---|
| 1 | $x_1$ | $y_1$ |
| 2 | $x_2$ | $y_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\widetilde{N}$ | $x_{\widetilde{N}}$ | $y_{\widetilde{N}}$ |

表 2: 要素・節点対応表

| 要素番号 | 要素の第 1 節点番号 | 要素の第 2 節点番号 | 要素の第 3 節点番号 |
|---|---|---|---|
| 1 | $i_1$ | $j_1$ | $k_1$ |
| 2 | $i_2$ | $j_2$ | $k_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $M$ | $i_M$ | $j_M$ | $k_M$ |

**例 14** 図 11 のように，三角形分割の節点と要素に番号をつけた時，節点・座標対応表と要素・節点対応表はそれぞれ表 3, 4 のようになる．

### 2.4.2　連立一次方程式 $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ の解を求める手順

1. 全体係数行列 $\widetilde{A}$ を直接剛性法で計算する．行列 $\widetilde{A}$ は行列 $A$ の成分を含む $\widetilde{N}$ 次正方行列である．
2. 全体右辺ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ を計算する．ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ は $\widetilde{N}$ 次元ベクトル．

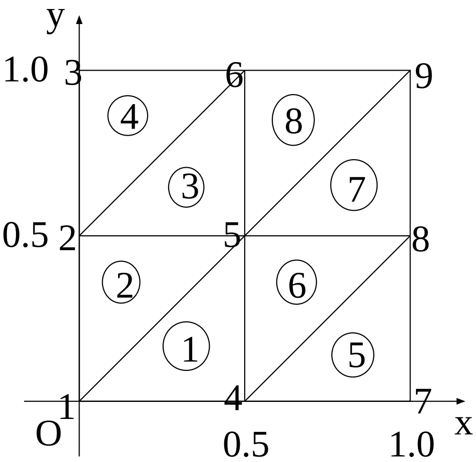


図 11: 正方領域 Ω の三角形分割の一例.

表 3: 節点・座標対応表

| 節点番号 | 節点の $x$ 座標 | 節点の $y$ 座標 |
|---|---|---|
| 1 | 0.0 | 0.0 |
| 2 | 0.0 | 0.5 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 9 | 1.0 | 1.0 |

3. Dirichlet 境界条件の処理をベクトル $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ と行列 $\widetilde{A}$ に施す．その処理後に得られるベクトルと行列をそれぞれ $\widetilde{\boldsymbol{f}}'$ と $\widetilde{A}'$ と書く．

4. $\widetilde{N}$ 次元連立一次方程式

   $$\widetilde{A}'\widetilde{\boldsymbol{u}} = \widetilde{\boldsymbol{f}}'$$

   を解く．この解 $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ の中に，$\boldsymbol{u}$ の解が含まれている．

### 2.4.3　直接剛性法（全体係数行列の計算アルゴリズム）

直接剛性法とは，三角形分割データ (節点・座標対応表と要素・節点対応表) から係数行列を構成する方法であり，そのアルゴリズムは整然としているので，そのプログラムを簡単に作成することができる．第 2.3 節で述べたように，解くべき方程式 $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ は係数行列 $A$ は $N$ 次元連立 1 次方程式であるが，直接剛性法では，とりあえず，行列 $A$ の成分を含む $\widetilde{N}$ 次の正方行列

$$\widetilde{A} := [a(\varphi_j,\,\varphi_i)]_{1\le i,\,j\le \widetilde{N}}$$

を作成する．この行列は，$\overline{\Gamma_D}$ 上の節点を除外すること無く，$\overline{\Omega}$ 全体の節点を考慮して構成される行列であり，**全体係数行列**と呼ばれる．

まず，

$$a(\varphi_j,\,\varphi_i) = \sum_{m=1}^{M} \int_{K_m} \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i \, d\boldsymbol{x}$$

表 4: 要素・節点対応表（要素の節点番号は，反時計回りに並べると良い.）

| 要素番号 | 要素の第 1 節点番号 | 要素の第 2 節点番号 | 要素の第 3 節点番号 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 | 5 |
| 2 | 1 | 5 | 2 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 8 | 5 | 9 | 6 |

と書けることに注意する．今，

$$\widetilde{A}^{(m)} := \left[\int_{K_m} \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i \, d\boldsymbol{x}\right]_{1\le i,\, j\le \widetilde{N}}$$

で $\widetilde{N}\times\widetilde{N}$ 行列 $\widetilde{A}^{(m)}$ を定義すると，

$$\widetilde{A} := \sum_{m=1}^{M} \widetilde{A}^{(m)} \tag{49}$$

となり，$\widetilde{A}^{(m)}$ の成分で値が非零になる (可能性がある) のは，$K_m$ の頂点の節点番号が $i_m$, $j_m$, $k_m$ の時には，次の 9 つの成分のみである：

$$\widetilde{A}^{(m)} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} \phantom{\cdots} & i_m & \phantom{\cdots} & j_m & \phantom{\cdots} & k_m & \phantom{\cdots} \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & * & \cdots & * & \cdots & * & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & * & \cdots & * & \cdots & * & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & * & \cdots & * & \cdots & * & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ i_m \\ \\ j_m \\ \\ k_m \\ \\ \end{array} \end{array} \qquad (*:\ \text{非零成分}).$$

これら 9 つの非零成分を抽出して，次のような $3\times 3$ 行列を考える：

$$A_e^{(m)} := \begin{bmatrix} a^{(m)}_{i_m,i_m} & a^{(m)}_{i_m,j_m} & a^{(m)}_{i_m,k_m} \\ a^{(m)}_{j_m,i_m} & a^{(m)}_{j_m,j_m} & a^{(m)}_{j_m,k_m} \\ a^{(m)}_{k_m,i_m} & a^{(m)}_{k_m,j_m} & a^{(m)}_{k_m,k_m} \end{bmatrix}$$

ここで，

$$a^{(m)}_{i,j} := \int_{K_m} \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i \, d\boldsymbol{x}$$

であり，$A_e^{(m)}$ は**要素係数行列**と呼ばれる．

全体係数行列 $\widetilde{A}$ の成分を得るためには，各要素 $K_m$ において要素係数行列 $A_e^{(m)}$ の成分を計算すれば良いことが分る．

### 2.4.4 要素係数行列の計算

まず，三角形要素 $K_m$ の頂点の節点番号 $i_m$, $j_m$, $k_m$ と局所節点番号 1, 2, 3 を対応付ける：

$$i_m \leftrightarrow 1, \quad j_m \leftrightarrow 2, \quad k_m \leftrightarrow 3.$$

これに伴って，節点座標を次のようにおく：

$$\begin{aligned}(x^1,\,y^1) &:= (x_{i_m}, y_{i_m})(\equiv \boldsymbol{q}_{i_m}),\\ (x^2,\,y^2) &:= (x_{j_m}, y_{j_m})(\equiv \boldsymbol{q}_{j_m}),\\ (x^3,\,y^3) &:= (x_{k_m}, y_{k_m})(\equiv \boldsymbol{q}_{k_m}).\end{aligned}$$

さらに，節点番号 $i_m,\,j_m,\,k_m$ の節点に対する基底関数の要素 $K_m$ への制限を次のようにおく：

$$\begin{aligned}\lambda_1 &:= \varphi_{i_m}|_{K_m},\\ \lambda_2 &:= \varphi_{j_m}|_{K_m},\\ \lambda_3 &:= \varphi_{k_m}|_{K_m}.\end{aligned}$$

この時，

$$\lambda_i(x^j,\,y^j) = \delta_{ij} \quad (1 \le i,\,j \le 3)$$

が成り立つ (図 12 参照)．$\lambda_i$ $(i = 1,\,2,\,3)$ は**面積座標**あるいは**形状関数**と呼ばれる．

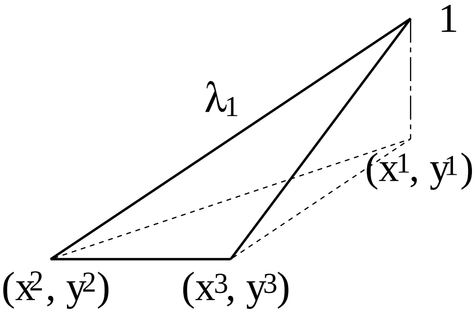


図 12: 形状関数 $\lambda_1$．

要素係数行列 $A_e^{(m)}$ は，次のようになる：

$$A_e^{(m)} = \left[\int_{K_m} \nabla\lambda_j \cdot \nabla\lambda_i \, d\boldsymbol{x}\right]_{1\le i,\,j\le 3}.$$

さて，各成分の計算をしよう．まず，各 $\lambda_i$ $(1 \le i \le 3)$ は 1 次関数なので，

$$\lambda_i(x,\,y) = \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i$$

と書くことができる．この時，$A_e^{(m)}$ の $(i,\,j)$ 成分 $\left[A_e^{(m)}\right]_{i,j}$ は

$$\left[A_e^{(m)}\right]_{i,j} = (\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j)|K_m|$$

となる．ここで，$|K_m|$ は $K_m$ の面積である．

あとは，$\alpha_i,\,\beta_i$ $(1 \le i \le 3)$ を計算すれば良い．まず，$i = 1$ の場合を考えると，$\alpha_1,\,\beta_1,\,\gamma_1$ は次の連立 1 次方程式を満たす：

$$\begin{bmatrix} x^1 & y^1 & 1\\ x^2 & y^2 & 1\\ x^3 & y^3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

よって，Cramer の公式から，

$$(50)\quad D := \det\begin{bmatrix} x^1 & y^1 & 1\\ x^2 & y^2 & 1\\ x^3 & y^3 & 1\end{bmatrix}$$

とすれば,

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{D}\det\begin{bmatrix} 1 & y^1 & 1 \\ 0 & y^2 & 1 \\ 0 & y^3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{D}(y^2 - y^3), \\ \beta_1 &= \frac{1}{D}\det\begin{bmatrix} x^1 & 1 & 1 \\ x^2 & 0 & 1 \\ x^3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{D}(x^2 - x^3)\end{aligned}$$

となる．同様にして，$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 2, 3)$ も求めることができ，

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{1}{D}(y^j - y^k), \\ \beta_i &= -\frac{1}{D}(x^j - x^k)\end{aligned}$$

となる．ここで，$(i, j, k)$ を $(1, 2, 3)$ の偶置換とすれば良い．

### 2.4.5 直接剛性法のアルゴリズム (まとめ)

`DO` $m = 1, 2, \ldots, M$:

1. 要素 $K_m$ の頂点の節点番号 $i_m, j_m, k_m$ を要素・節点対応表により調べる．
2. 節点番号 $i_m, j_m, k_m$ の節点座標を節点・座標対応表により調べ，次のようにおく：

$$\begin{aligned}(x^1, y^1) &:= (x_{i_m}, y_{i_m})(\equiv \boldsymbol{q}_{i_m}), \\ (x^2, y^2) &:= (x_{j_m}, y_{j_m})(\equiv \boldsymbol{q}_{j_m}), \\ (x^3, y^3) &:= (x_{k_m}, y_{k_m})(\equiv \boldsymbol{q}_{k_m}).\end{aligned}$$

3. 要素剛性行列 $A_e^{(m)}$ の計算をする．

$$D := \det\begin{bmatrix} x^1 & y^1 & 1 \\ x^2 & y^2 & 1 \\ x^3 & y^3 & 1 \end{bmatrix}.$$

   $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ に対し，

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{1}{D}(y^j - y^k), \\ \beta_i &= -\frac{1}{D}(x^j - x^k)\end{aligned}$$

   を計算し，$1 \le i, j \le 3$ に対し，

$$\left[A_e^{(m)}\right]_{i,j} := (\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j)\frac{|D|}{2}.$$

4. 要素剛性行列 $A_e^{(m)}$ の各成分を全体係数行列 $\widetilde{A}$ の対応する成分に加える．

$$\begin{aligned}\left[\widetilde{A}\right]_{i_m,i_m} &:= \left[\widetilde{A}\right]_{i_m,i_m} + \left[A_e^{(m)}\right]_{1,1}, \\ \left[\widetilde{A}\right]_{i_m,j_m} &:= \left[\widetilde{A}\right]_{i_m,j_m} + \left[A_e^{(m)}\right]_{1,2}, \\ \left[\widetilde{A}\right]_{i_m,k_m} &:= \left[\widetilde{A}\right]_{i_m,k_m} + \left[A_e^{(m)}\right]_{1,3}, \\ \left[\widetilde{A}\right]_{j_m,i_m} &:= \left[\widetilde{A}\right]_{j_m,i_m} + \left[A_e^{(m)}\right]_{2,1}, \\ &\vdots \\ \left[\widetilde{A}\right]_{k_m,k_m} &:= \left[\widetilde{A}\right]_{k_m,k_m} + \left[A_e^{(m)}\right]_{3,3}.\end{aligned}$$

ここで，$\widetilde{A}$ の $(i,\, j)$ 成分を $\left[\widetilde{A}\right]_{i,j}$ とした．

`ENDDO`

**註記 15** 要素 $K_m$ の節点番号 $i_m,\, j_m,\, k_m$ が反時計回りの時，$D > 0$ となる．

**註記 16** 行列 $\widetilde{A}$ は疎行列になる．第 $i$ 節点 $\boldsymbol{q}_i$ のまわりの節点番号が図 13 のように，$\boldsymbol{q}_{j_1},\, \ldots,\, \boldsymbol{q}_{j_7}$ だったとすると，$\widetilde{A}$ の第 $i$ 行の非零成分は $j_1$ 列，…, $j_7$ 列のみに存在する．

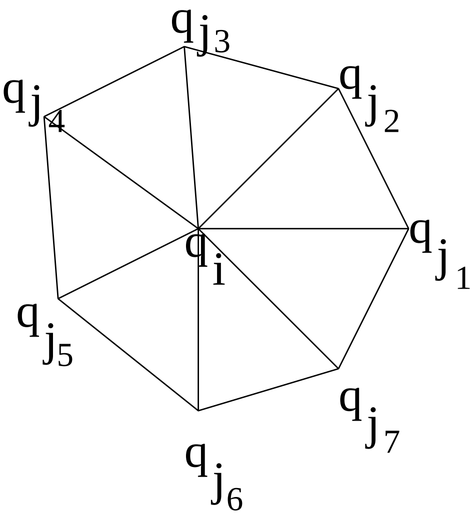


図 13: 第 $i$ 番目の節点と隣接する節点．

**註記 17** 行列 $\widetilde{A}$ の非零成分の分布は要素・節点対応表から分かる．

**註記 18** 3 つの頂点 $\boldsymbol{q}_1,\, \boldsymbol{q}_2,\, \boldsymbol{q}_3$ を持つ三角形 $K$ に対して，$K$ 上の 1 次関数 $\lambda_i$ $(i = 1,\, 2,\, 3)$ を次の条件を満足するようにとる：

$$\lambda_i(\boldsymbol{q}_j) = \delta_{ij} \quad (1 \le i,\, j \le 3).$$

面積座標 $\lambda_i$ $(i = 1,\, 2,\, 3)$ は次のように表すこともできる：

(51)

$$\lambda_1(x,\, y) = D^{-1} \det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x^2 & y^2 & 1 \\ x^3 & y^3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2(x,\, y) = D^{-1} \det \begin{bmatrix} x^1 & y^1 & 1 \\ x & y & 1 \\ x^3 & y^3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3(x,\, y) = D^{-1} \det \begin{bmatrix} x^1 & y^1 & 1 \\ x^2 & y^2 & 1 \\ x & y & 1 \end{bmatrix}.$$

ここで，$(x^i,\, y^i)$ は $\boldsymbol{q}_i$ の座標，$D$ は (50) によって定義される行列式である．

面積座標 $\lambda_i$ $(i = 1,\, 2,\, 3)$ に対しても，長さ座標と同様に，次のいくつかの等式が成り立つ：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \begin{bmatrix} x^i \\ y^i \end{bmatrix} \lambda_i(x,\, y) \quad \forall (x,\, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i(x,\, y) \equiv 1 \quad \forall (x,\, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$(52) \quad \int_K \lambda_1^l(\boldsymbol{x}) \lambda_2^m(\boldsymbol{x}) \lambda_3^n(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = 2 \frac{l!m!n!}{(l+m+n+2)!} |K| \quad \forall l,\, \forall m,\, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

任意の $\boldsymbol{x}=(x,\,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して，$\{\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{q}_2,\,\boldsymbol{q}_3\},\,\{\boldsymbol{q}_1,\,\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{q}_3\},\,\{\boldsymbol{q}_1,\,\boldsymbol{q}_2,\,\boldsymbol{x}\}$ を頂点とする三角形をそれぞれ $K_1,\,K_2,\,K_3$ とする．この時，

$$(53)\quad \lambda_i(x,\,y)=\frac{\operatorname{meas}K_i}{\operatorname{meas}K}\quad \forall(x,\,y)\in\mathbb{R}^2$$

が成り立つ．ここで，$\operatorname{meas}K_i$ を符号付きの三角形 $K_i$ の面積とする．ただし，$\operatorname{meas}K,\,\operatorname{meas}K_1,\,\operatorname{meas}K_2,\,\operatorname{meas}K_3$ は，それぞれ，頂点 $\{\boldsymbol{q}_1,\,\boldsymbol{q}_2,\,\boldsymbol{q}_3\}$，$\{\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{q}_2,\,\boldsymbol{q}_3\},\,\{\boldsymbol{q}_1,\,\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{q}_3\},\,\{\boldsymbol{q}_1,\,\boldsymbol{q}_2,\,\boldsymbol{x}\}$ が反時計回りに並んでいる時に正の値をとるものとする．(53) は (51) から直ちに従う．$\boldsymbol{x}=(x,\,y)\in K$ の時は，図 14 のようになる．

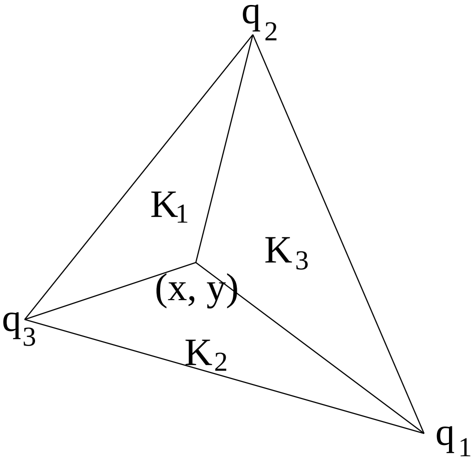


図 14: 点 $(x,\,y)$ によって，三角形 $K$ は $K_1,\,K_2,\,K_3$ に分割される．

**註記 19** 行列 $\widetilde{A}$ は正則ではないことに注意する．$\widetilde{A}$ は 0 を固有値として持ち，対応する固有ベクトルは $[1\,1\,\cdots\,1]^T$ で与えられる．この事実は，プログラミングにおけるデバッグに用いることができる．行列 $\widetilde{A}$ が計算できたら，

$$\widetilde{A}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

を確認してみる．これが成立していない時には，プログラムにバグがある!

**註記 20** 基底関数 $\varphi_j$ は三角形分割の要素の辺上で一般には滑らかではないので，その辺上で通常の意味での偏微分をすることはできないが，$\varphi_j$ は連続関数なので，その超関数微分による偏導関数は，各要素で通常の偏微分をすることによって得られ，不連続な区分定数関数になる．

### 2.4.6　全体右辺ベクトルの計算アルゴリズム

説明を簡略化するために，まず $g_N\equiv 0$ の場合を考える．

全体右辺ベクトルは次のように定義されるベクトルである:

$$\widetilde{\boldsymbol{f}}:=\left[(f,\,\varphi_i)\right]_{1\le i\le\widetilde{N}}\,.$$

ここで，

$$(f,\,\varphi_i)=\sum_{m=1}^{\widetilde{N}}\int_{K_m}f\varphi_i\,d\boldsymbol{x}$$

なので，$\widetilde{N}$ 次元ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{f}}^{(m)}$ を定義すると，

$$\widetilde{\boldsymbol{f}} := \sum_{m=1}^{M} \widetilde{\boldsymbol{f}}^{(m)}$$

となり，$\widetilde{\boldsymbol{f}}^{(m)}$ の成分で値が非零になる (可能性がある) のは，$K_m$ の頂点の節点番号が $i_m$, $j_m$, $k_m$ の時には，次の 3 つの成分のみである：

$$\widetilde{\boldsymbol{f}}^{(m)} = \begin{array}{c|c} \left[\begin{array}{c} \vdots \\ * \\ \vdots \\ * \\ \vdots \\ * \\ \vdots \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ i_m \\ \\ j_m \\ \\ k_m \\ \\ \end{array} \end{array} \qquad (*:\ \text{非零成分}).$$

これら 3 つの非零成分を抽出して，要素右辺ベクトル，すなわち，次のような 3 次元ベクトルを考える：

$$\boldsymbol{f}_e^{(m)} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_{i_m}^{(m)} \\ \boldsymbol{f}_{j_m}^{(m)} \\ \boldsymbol{f}_{k_m}^{(m)} \end{bmatrix}.$$

直接剛性法と同様に，各要素で要素右辺ベクトルを計算し，その成分を全体右辺ベクトルの対応する成分に加えていけば良い．すなわち，直接剛性法の繰り返し文の 3, 4 の操作を次のように変更すれば良い．

3. 要素右辺ベクトル $\boldsymbol{f}_e^{(m)}$ の計算を行う．$1 \leq i \leq 3$ に対し，

   $$\left[\boldsymbol{f}_e^{(m)}\right]_i := \int_{K_m} f \lambda_i \, d\boldsymbol{x}.$$

   この右辺の積分値が解析的に求まらない時は，数値積分を行う[7]．

4. 要素右辺ベクトル $\boldsymbol{f}_e^{(m)}$ の各成分を全体右辺ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ の対応する成分に加える．

   $$\begin{aligned} \left[\widetilde{\boldsymbol{f}}\right]_{i_m} &:= \left[\widetilde{\boldsymbol{f}}\right]_{i_m} + \left[\boldsymbol{f}_e^{(m)}\right]_1, \\ \left[\widetilde{\boldsymbol{f}}\right]_{j_m} &:= \left[\widetilde{\boldsymbol{f}}\right]_{j_m} + \left[\boldsymbol{f}_e^{(m)}\right]_2, \\ \left[\widetilde{\boldsymbol{f}}\right]_{k_m} &:= \left[\widetilde{\boldsymbol{f}}\right]_{k_m} + \left[\boldsymbol{f}_e^{(m)}\right]_3. \end{aligned}$$

   ここで，$\widetilde{\boldsymbol{f}}$ の第 $i$ 成分を $\left[\widetilde{\boldsymbol{f}}\right]_i$ とした．

### 2.4.7 Dirichlet 境界条件の処理

全体係数行列 $\widetilde{A}$ と全体右辺ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ に Dirichlet 境界条件の効果を組み込む．

1. 全体右辺ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ に次の操作を施す．これは，(48) に対応する操作である．

```
DO $i = N+1, N+2, \ldots, N+N_d = \widetilde{N}$:
    $\left[\widetilde{\boldsymbol{f}}\right]_i := \left[\widetilde{\boldsymbol{f}}\right]_i - \sum_{k=N+1}^{\widetilde{N}} g_D(\boldsymbol{q}_k) \left[\widetilde{A}\right]_{i,k}$
ENDDO
```

---

[7] 例えば，$f$ をその 1 次補間関数 $\hat{f} := \sum_{i=1}^{\widetilde{N}} f(\boldsymbol{q}_i)\varphi_i$ で近似する．その積分値の計算には，積分公式 (52) を利用することができる．

2. 全体係数行列 $\widetilde{A}$ に次の操作を施す．

   `DO` $k = N+1,\, N+2,\, \ldots,\, N+N_d = \widetilde{N}$:

   行列 $\widetilde{A}$ の $k$ 行目と $k$ 列目の対角成分を除くすべての成分を 0 とし，対角成分 $\left[\widetilde{A}\right]_{k,k} := 1$ とする．すなわち，下図のようにする．

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccc} \phantom{0} & \phantom{\cdots} & \phantom{0} & k & \phantom{0} & \phantom{\cdots} & \phantom{0} \end{array} & \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & \\
 & & & \vdots & & & \\
 & & & 0 & & & \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & 0 & & & \\
 & & & \vdots & & & \\
 & & & 0 & & &
\end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array} .$$

   `ENDDO`

3. 全体右辺ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ に，さらに次の操作を施す．

   `DO` $k = N+1,\, N+2,\, \ldots,\, N+N_d = \widetilde{N}$:

   $$\left[\widetilde{\boldsymbol{f}}\right]_k := g_D(\boldsymbol{q}_k)$$

   `ENDDO`

このようにしてできた $\widetilde{N}$ 次正方行列を $\widetilde{A}'$, $\widetilde{N}$ 次元ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{f}}'$ とし，

$$(54) \quad \widetilde{A}'\tilde{\boldsymbol{u}} = \widetilde{\boldsymbol{f}}'$$

を解く．連立 1 次方程式 (54) は次のようになっている：

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{u}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g}_D \end{bmatrix}.$$

ここで，$A$ は $N$ 次の正方行列，$I$ は $N_d$ 次の単位行列，$\boldsymbol{u}$ が本来求めるべき $N$ 次の未知係数ベクトルである．

連立 1 次方程式 (54) の解 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ を用いて，

$$\hat{u} := \sum_{i=1}^{\widetilde{N}} [\tilde{\boldsymbol{u}}]_i\, \varphi_i$$

とすると，$\hat{u}$ は近似問題 (46) の $g_N = 0$ の場合の解となる．

### 2.4.8 Dirichlet 境界条件の処理 ($\overline{\Gamma_D}$ 上にある節点の番号付けが一般の場合)

Dirichlet 境界条件の課された境界 $\overline{\Gamma_D}$ 上にある節点の番号が $i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_{N_d}$ であるとする．(実際には，三角形分割を作成した際に，これらの番号を知っておく必要がある．) この時，上記の 1 から 3 の操作は次のようになる．

1. 全体右辺ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ に次の操作を施す．

   `DO` $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, \widetilde{N}$:

   $$\left[\widetilde{\boldsymbol{f}}\right]_i := \left[\widetilde{\boldsymbol{f}}\right]_i - \sum_{k=1}^{N_d} g_D(\boldsymbol{q}_{i_k}) \left[\widetilde{A}\right]_{i,i_k}$$

   `ENDDO`

2. 全体係数行列 $\widetilde{A}$ に次の操作を施す．

DO $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, N_d$:

行列 $\widetilde{A}$ の $i_k$ 行目と $i_k$ 列目の対角成分を除くすべての成分を 0 とし，対角成分 $\left[\widetilde{A}\right]_{i_k, i_k} := 1$ とする．すなわち，下図のようにする．

$$\begin{array}{c c}
\begin{array}{ccccccc} & & & i_k & & & \end{array} & \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & \\
 & & & \vdots & & & \\
 & & & 0 & & & \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & 0 & & & \\
 & & & \vdots & & & \\
 & & & 0 & & &
\end{array}\right] & i_k
\end{array} .$$

ENDDO

3. 全体右辺ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ に，さらに次の操作を施す．

DO $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, N_d$:

$\left[\widetilde{\boldsymbol{f}}\right]_{i_k} := g_D(\boldsymbol{q}_{i_k})$

ENDDO

### 2.4.9 非斉次 Neumann 境界条件の処理

Neumann データ $g_N$ が恒等的に零とはならない場合，Neumann 境界条件から生ずるベクトル

$$\widetilde{\boldsymbol{g}}_N := [[g_N,\, \varphi_i]]_{1 \le i \le \widetilde{N}}$$

を全体右辺ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ に加えて，前述の Dirichlet 条件の処理を行えば良い．

ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{g}}_N$ の計算方法について説明する．これも $\widetilde{A}$, $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ の作成法と同様に $\Gamma_N$ に含まれる要素の辺ごとに積分を計算して，$\widetilde{\boldsymbol{g}}_N$ の対応する成分に加えていけば良い．ただし，この場合は，$\Gamma_N$ に含まれる要素の辺に番号付けをし，その番号とその両端の節点の番号を対応付けるデータ表，辺要素・節点対応表が必要になる（表 5 参照)．

表 5: 辺要素・節点対応表（$L$ は $\Gamma_N$ に含まれる要素の辺の数である．）

| 辺要素番号 | 要素の第 1 節点番号 | 要素の第 2 節点番号 |
|---|---|---|
| 1 | $i_1$ | $j_1$ |
| 2 | $i_2$ | $j_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $L$ | $i_L$ | $j_L$ |

Neumann データ $g_N$ が複雑な関数で，積分値 $[g_N,\, \varphi_i] \equiv \int_{\Gamma_N} g_N \varphi_i \, d\gamma$ が解析的に計算できない場合は，数値積分を用いる．一つの方法としては，$g_N$ の補間関数：

$$\hat{g}_N := \sum_{\boldsymbol{q}_j \in \overline{\Gamma_N}} g_N(\boldsymbol{q}_j) \varphi_j \big|_{\Gamma_N}$$

を用いて，$[g_N,\, \varphi_i]$ を $[\hat{g}_N,\, \varphi_i]$ で近似する．その値を求める際に，長さ座標の積分公式 (38) を用いることができる．

## 2.5　補足

### 2.5.1　差分法との関係

2 次元 Poisson 方程式に対する有限要素法と差分法の関係については，[1] を見よ．

**演習問題 21** 2 次元有界領域 $\Omega$ において，次の偏微分方程式の斉次 Neumann 境界値問題を考える：

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta u + u &=& f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} &=& 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{55}$$

ここで，$\partial\Omega$ は $\Omega$ の境界を表すものとする．この問題の弱形式は

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Find } u \text{ such that} \\ a(u,\, v) = (f,\, v) \quad \forall v. \end{array}\right. \tag{56}$$

で与えられることを示せ．ただし，

$$\begin{aligned} a(u,\, v) &:= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x} + \int_\Omega uv \, d\boldsymbol{x}, \\ (f,\, g) &:= \int_\Omega fg \, d\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

である．

**註記 22** Galerkin 法の基底関数として，第 2.2 節で定義した $\varphi_j$ $(1 \le j \le \widetilde{N})$ を用いて，問題 (56) の近似方程式を定式化した時に得られる連立 1 次方程式は，次で与えられる：

$$(A + B)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}.$$

ここで，

$$\begin{aligned} [A]_{i,j} &= a(\varphi_j,\, \varphi_i) \quad (1 \le i,\, j \le \widetilde{N}), \\ [B]_{i,j} &= (\varphi_j,\, \varphi_i) \quad (1 \le i,\, j \le \widetilde{N}), \\ [\boldsymbol{f}]_i &= (f,\, \varphi_i) \quad (1 \le i,\, j \le \widetilde{N}). \end{aligned}$$

ここで，$\widetilde{N}$ は $\Omega$ の三角形分割の総節点数である．

質量行列 $B$ も直接剛性法で要素係数行列を次で定義する要素質量行列 $B_e^{(m)}$ とすることによって構成することができる．

$$\left[B_e^{(m)}\right]_{i,j} := \int_{K_m} \lambda_i \lambda_j \, d\boldsymbol{x} \quad (1 \le i,\, j \le 3).$$

積分公式 (52) を使って，要素質量行列の成分計算ができる：

$$\begin{aligned} \left[B_e^{(m)}\right]_{i,i} &= \frac{1}{6}|K_m| \quad (1 \le i \le 3), \\ \left[B_e^{(m)}\right]_{i,j} &= \frac{1}{12}|K_m| \quad (1 \le i \ne j \le 3). \end{aligned}$$

# 3　FreeFEM++入門

## 3.1　FreeFEM++とは（文献 [4] からの引用）

FreeFEM プロジェクトはパリ第 6 大学の O. ピロノ (Pironneau) によってはじめられ，その後，F. エヒト (Hecht, パリ第 6 大学），大塚厚二（広島国際学院大学）らの協力のもとに進められている．

## 3.2　インストール

FreeFEM++は`http://www.freefem.org/`からダウンロードできる．また，FreeFEM++用統合環境 FreeFEM++-cs も用意されているので，その統合環境を `http://www.ann.jussieu.fr/ lehyaric/ffcs/index.htm` からダウンロードすることを勧める.（とりあえずは，FreeFEM++-cs をインストールするだけ良い.）

## 3.3　三角形分割

図 15 のような $W$ 型領域を考える．この領域の三角形分割を生成する．プログラムは下記の`w-triangulation.edp`[8] のようになる．生成結果は図 16 のようになる．その三角形分割データは`w-triangulation.msh`に保存される（詳しくは．3.4 参照）．`w-triangulation.edp`のプログラムでは，`border` コマンドによって領域の境界を定義する際，境界のパラメータ表示を用いるが，そのパラメータを領域を左手に見て進むようにとらなくてはならない.

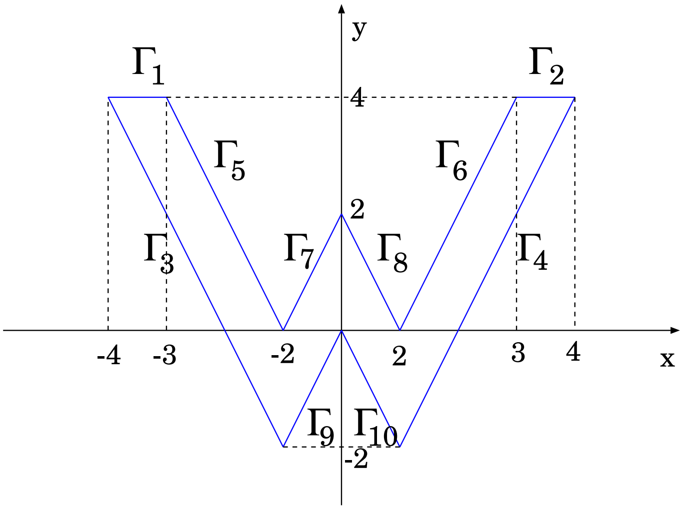


図 15: W 型領域 Ω と境界ラベル

---

[8] `http://www.im.uec.ac.jp/~koyama/w.html` からダウンロードできる．

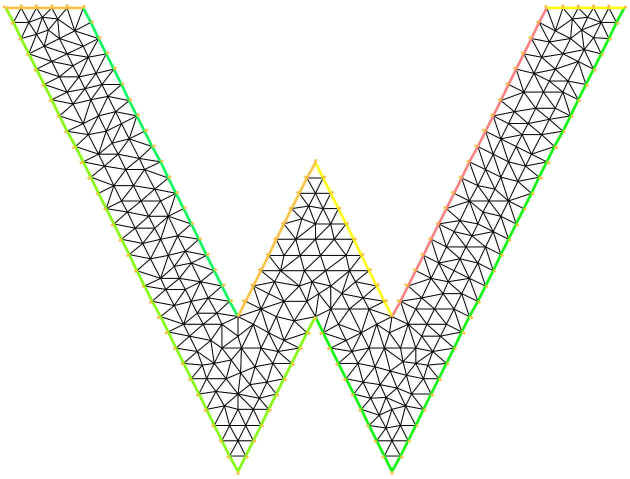


図 16: W 型領域の三角形分割

w-triangulation.edp

```
int n=5;

border Gamma1(t = 0, 1) {x = -t -3; y = 4;label=1;}
border Gamma2(t = 0, 1) {x = -t +4; y = 4;label=1;}
border Gamma3(t = 0, 1) {x = 3*t -4; y = -6*t + 4;label=2;}
border Gamma4(t = 0, 1) {x = 3*t +1; y = 6*t - 2;label=2;}
border Gamma5(t = 0, 1) {x = -2*t -1; y = 4*t;label=2;}
border Gamma6(t = 0, 1) {x = -2*t +3; y = -4*t + 4;label=2;}
border Gamma7(t = 0, 1) {x = -t; y = -2*t + 2;label=2;}
border Gamma8(t = 0, 1) {x = -t+1; y = 2*t;label=2;}
border Gamma9(t = 0, 1) {x = t-1; y = 2*t-2;label=2;}
border Gamma10(t = 0, 1) {x = t; y = -2*t;label=2;}

mesh Th = buildmesh(Gamma1(n)+Gamma2(n)+Gamma3(6*n)+Gamma4(6*n)
                   +Gamma5(4*n)+Gamma6(4*n)+Gamma7(2*n)+Gamma8(2*n)
                   +Gamma9(2*n)+Gamma10(2*n));

plot(Th, wait=true, ps="w-triangulation.eps");

savemesh(Th, "w-triangulation.msh");
```

正方形領域 $[0, 1]^2$ の三角形分割 ($4 \times 5$ 分割)

```
mesh Th = square(4,5);

plot(Th, wait=true, ps="square.eps");

savemesh(Th, "square.msh");
```

矩形領域 $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$ の三角形分割 ($m \times n$ 分割)

```
real x0=1.2,x1=1.8;
real y0=0,y1=1;
int n=5,m=20;
mesh Th=square(n,m,[x0+(x1-x0)*x,y0+(y1-y0)*y]);

plot(Th, wait=true, ps="rectangle.eps");

savemesh(Th, "rectangle.msh");
```

円領域，円環領域の三角形分割

```
border a(t=0,2*pi){ x=cos(t); y=sin(t);label=1;}
border b(t=0,2*pi){ x=0.3+0.3*cos(t); y=0.3*sin(t);label=2;}

plot(a(50)+b(+30)) ;  // to see a plot of the border mesh

mesh Thwithouthole= buildmesh(a(50)+b(+30));
mesh Thwithhole   = buildmesh(a(50)+b(-30));

plot(Thwithouthole,wait=1,ps=’’Thwithouthole.eps’’);
plot(Thwithhole,wait=1,ps=’’Thwithhole.eps’’);

savemesh(Thwithouthole, "Thwithouthole.msh");
savemesh(Thwithhole, "Thwithhole.msh");
```

## 3.4 三角形分割データファイル

図 16 の三角形分割 Th のデータは，`savemesh` によって，ファイル `w-triangulation.msh` に保存される．ファイルに書かれるデータフォーマットは 4 つのデータ群からなる．第 1 データ群は，節点数，要素数，境界上の辺の数であり，第 2 データ群は「節点・座標対応表」に，第 3 データ群は「要素・節点対応表」に，第 4 データ群は「境界要素・節点対応表」に，それぞれ対応するデータである．これらのデータ群は表 6 のように並べられて出力される．

`w-triangulation.msh` の中身

```
382 612 150
-4 4 2
-3.7966563174 4 1
-3.59888543913 4 1
-3.90262050753 3.80524101505 2
      .                .       .
```

```
          .                      .         .
          .                      .         .


235 228 232 0
202 210 217 0
199 201 214 0
 .   .   .  .
 .   .   .  .
 .   .   .  .


195 199 2
199 201 2
201 200 2
 .   .   .
 .   .   .
 .   .   .
```

表 6: 三角形分割データ　フォーマット

| 第 1 カラムの数 | 第 2 カラムの数 | 第 3 カラムの数 | 第 4 カラムの数 | 行数 |
|---|---|---|---|---|
| 節点数 | 要素数 | 境界上の辺の数 | - | 1 行 |
| 節点 $x$ 座標 | 節点 $y$ 座標 | 境界ラベル | - | 節点数 |
| 要素の第 1 節点番号 | 要素の第 2 節点番号 | 要素の第 3 節点番号 | 部分領域ラベル | 要素数 |
| 境界にある辺の第 1 節点番号 | 境界にある辺の第 2 節点番号 | 境界ラベル | - | 境界上の辺の数 |

**註記 23** 3 次元領域の四面体要素分割には，`Gmsh` が良いようです．tagami@ウィキ `http://www31.atwiki.jp/tagami/` に使い方に関する分かり易い資料があります.

### 3.5 Poisson 方程式 (Laplace 方程式)

図 15 の W 型領域 $\Omega$ において次の Laplace 方程式の混合境界値問題を考える：

$$(P)\begin{cases} -\Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= 1 \quad \text{on } \Gamma_1, \\ u &= 0 \quad \text{on } \Gamma_2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{on } \Gamma_1,\Gamma_2 \text{ 以外の境界.} \end{cases}$$

この弱形式は

$$(\Pi)\begin{cases} \text{Find } u \in V(g) \text{ such that} \\ \displaystyle\int_\Omega \left( \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = 0 \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

ここで，

$$\begin{aligned} V(g) &:= \left\{ w \in H^1(\Omega) \,|\, w = g \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \right\}, \\ g &:= \begin{cases} 1 & \text{on } \Gamma_1, \\ 0 & \text{on } \Gamma_2, \end{cases} \\ V &:= \left\{ v \in H^1(\Omega) \,|\, v = 0 \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \right\}. \end{aligned} \tag{57}$$

この問題を 3.3 節の三角形分割を用いて解くソースプログラム（`w-laplace.edp`）は以下のようである．ただし，分割はより細かくしてある．すなわち，`n=10` としてある．

w-laplace.edp

```
int n=10;

border Gamma1(t = 0, 1) {x = -t -3; y = 4;}
border Gamma2(t = 0, 1) {x = -t +4; y = 4;}
border Gamma3(t = 0, 1) {x = 3*t -4; y = -6*t + 4;}
border Gamma4(t = 0, 1) {x = 3*t +1; y = 6*t - 2;}
border Gamma5(t = 0, 1) {x = -2*t -1; y = 4*t;}
border Gamma6(t = 0, 1) {x = -2*t +3; y = -4*t + 4;}
border Gamma7(t = 0, 1) {x = -t; y = -2*t + 2;}
border Gamma8(t = 0, 1) {x = -t+1; y = 2*t;}
border Gamma9(t = 0, 1) {x = t-1; y = 2*t-2;}
border Gamma10(t = 0, 1) {x = t; y = -2*t;}

mesh Th = buildmesh(Gamma1(n)+Gamma2(n)+Gamma3(6*n)+Gamma4(6*n)
                   +Gamma5(4*n)+Gamma6(4*n)+Gamma7(2*n)+Gamma8(2*n)
                   +Gamma9(2*n)+Gamma10(2*n));

fespace Vh(Th, P1);
Vh u, v;

solve laplace(u, v) = int2d(Th)(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v))
+ on(Gamma1, u=1) + on(Gamma2, u=0);

plot(u, wait=true, value=true, fill=true, ps="w-laplace.eps");
```

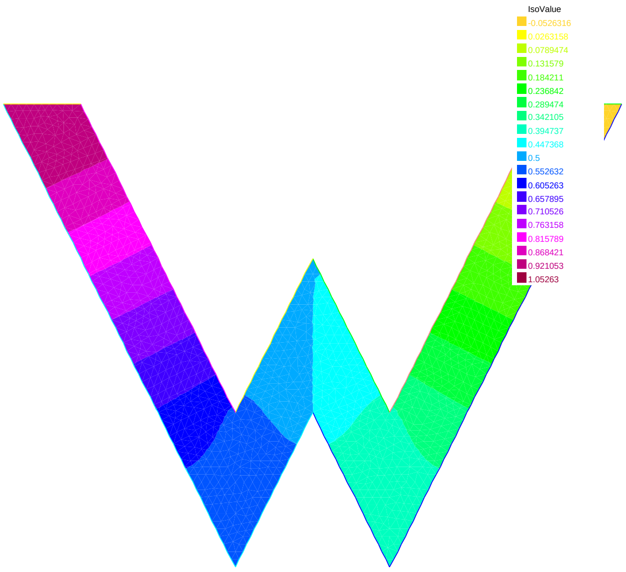


図 17: `w-laplace.edp` の出力結果

Laplace 方程式の解のファイルへの出力方法 (含 gnuplot 出力形式)

```
int n=5;
real a = 1.0, b = 2.0;

border Gamma1(t = 0, 1) {x = (b-a)*t + a; y = 0.0;}
border Gamma2(t = 0, 0.5*pi) {x = b*cos(t); y = b*sin(t);}
border Gamma3(t = 0, 1) {x = 0.0; y = (a-b)*t + b;}
border Gamma4(t = 0, 0.5*pi) {x = a*cos(0.5*pi-t); y = a*sin(0.5*pi-t);}

mesh Th = buildmesh(Gamma1(n)+Gamma2(2*n)+Gamma3(n)+Gamma4(2*n));

fespace Vh(Th, P1);
Vh u, v, w=0;

solve laplace(u, v) = int2d(Th)(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v))
+ on(Gamma1, u=1) + on(Gamma3, u=5);

plot(u, wait=true, value=true, fill=true, ps="w-laplace.eps");

{ ofstream ff("graph.dat");
   for (int i=0; i<Th.nt; i++)
   { for (int j= 0; j<3; j++)
     ff<< Th[i][j].x << "   "<< Th[i][j].y << "   "<< u[][Vh(i,j)]<<endl;
    ff<< Th[i][0].x << "   "<< Th[i][0].y << "   "<< u[][Vh(i,0)]<<"\n\n\n";
 };
};

{ ofstream ff("tri.dat");
   for (int i=0; i<Th.nt;i++)
   { for (int j= 0; j<3; j++)
     ff<< Th[i][j].x << "   "<< Th[i][j].y << "   "<< w[][Vh(i,j)]<<endl;
    ff<< Th[i][0].x << "   "<< Th[i][0].y << "   "<< w[][Vh(i,0)]<<"\n\n\n";
 };
};

{ ofstream ff("sol.dat");
  ff<< u[];
};

savemesh(Th, "w-triangulation.msh");
```

**注記 24** ファイル名等を囲うダブルクォーテーションでエラーが出る場合に注意！カト・ぺなどでダブルクォーテーションのコード変換がうまくいかず，エラーが出る場合がある．

## 3.6　熱伝導方程式

有界多角形領域 $\Omega$ において次の熱伝導方程式の初期値・境界値問題を考える：

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(\boldsymbol{x},\,t) - \Delta u(\boldsymbol{x},\,t) &= f(\boldsymbol{x},\,t) \quad \text{in } \Omega\times(0,\,T], \\ u(\boldsymbol{x},\,t) &= g(\boldsymbol{x},\,t) \quad \text{on } \Gamma_D\times(0,\,T], \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{x},\,t) &= 0 \quad \text{on } \Gamma_N\times(0,\,T], \\ u(\boldsymbol{x},\,0) &= u^0(\boldsymbol{x}) \quad \text{in } \Omega. \end{cases}$$

ここで，領域 $\Omega$ の境界 $\partial\Omega$ は二つの部分 $\Gamma_D$ と $\Gamma_N$ からなるものとする．

この弱形式は

$$(\Pi)\begin{cases} \text{Find } u:\,[0,\,T]\longrightarrow H^1(\Omega) \text{ such that} \\ \dfrac{d}{dt}(u(t),\,v)+a(u(t),\,v) = (f(t),\,v) \quad \forall v\in V, \\ u(t) = g(t) \quad \text{on } \Gamma_D, \\ u(0) = u^0 \quad \text{in } \Omega. \end{cases}$$

ここで，

$$\begin{aligned} (u(t),\,v) &:= \int_\Omega u(\boldsymbol{x},\,t)v(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}, \\ a(u(t),\,v) &:= \int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x},\,t)\cdot\nabla v(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}, \\ V &:= \left\{v\in H^1(\Omega)\,|\,v=0 \text{ on } \Gamma_D\right\}. \end{aligned}$$

**註記 25** 時間発展問題を解く一つのプロセスとして，次のような標準的な方法がある[9]：

初期値・境界値問題 ⟶ 弱形式 ⟶ (空間方向の離散化による) **半離散近似問題**[10]
⟶ (時間方向の離散化による) **全離散近似問題**[11]

### 3.6.1　半離散近似問題

領域 $\Omega$ に三角形分割を施し，その節点を $\boldsymbol{q}_1,\,\boldsymbol{q}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{q}_{\widetilde{N}}$ とする．ただし，記述を簡単にするために次のように番号付けされているものとする．

- $\boldsymbol{q}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{q}_{N_i}$ : $\Omega$ 内部節点，
- $\boldsymbol{q}_{N_i+1},\,\ldots,\,\boldsymbol{q}_{N_i+N_n}$ : $\overset{\circ}{\Gamma}_N$ 上の節点，
- $\boldsymbol{q}_{N+1},\,\ldots,\,\boldsymbol{q}_{N+N_d}$ : $\overline{\Gamma_D}$ 上節点．

ここで，$N:=N_i+N_n$ とし，$\widetilde{N}=N+N_d$ となるものとした．

節点 $\boldsymbol{q}_i$ に対応する基底関数を $\varphi_i$ とする．すなわち，$\varphi_i$ は，$\varphi_i(\boldsymbol{q}_j)=\delta_{ij}$ $(1\le i,\,j\le\widetilde{N})$ を満たす区分 1 次連続関数とする．この時，関数空間（有限要素空間）：

$$\begin{aligned} V_h &:= \operatorname{span}\{\varphi_i\,|\,1\le i\le N\}, \\ W_h &:= \operatorname{span}\{\varphi_i\,|\,1\le i\le\widetilde{N}\} \end{aligned}$$

を導入する[12]．

---

[9] 線の方法 (Method of lines) と呼ばれることもある．

[10] 連立常微分方程式の初期値問題になる．

[11] ベクトル漸化式の初期値問題になる．

[12] $V_h=\{v_h\in W_h\,|\,v_h=0 \text{ on } \Gamma_D\}$ が成り立つことに注意する．

この時，弱形式 $(\Pi)$ の半離散近似問題を考えることができる：

$$(\Pi_h)\begin{cases}\text{Find } u_h : [0,\,T] \longrightarrow W_h \text{ such that} & \\ \dfrac{d}{dt}(u_h(t),\,v_h) + a(u_h(t),\,v_h) = (f(t),\,v_h) & \forall v_h \in V_h \\ u_h(t) = g_h(t) & \text{on } \Gamma_D, \\ u_h(0) = u_h^0 & \text{in } \Omega.\end{cases}$$

ここで，$g_h$ および $u_h^0$ はそれぞれ $g$ および $u^0$ の適当な近似関数である．

今，半離散近似問題 $(\Pi_h)$ における $g_h$ を

$$g_h(\boldsymbol{x},\,t) = \sum_{j=N+1}^{\widetilde{N}} g(\boldsymbol{q}_j,\,t)\varphi_j(\boldsymbol{x})$$

で与えるものとすると，問題 $(\Pi_h)$ の解 $u_h$ は

$$u_h(\boldsymbol{x},\,t) = \sum_{j=1}^{N} c_j(t)\varphi_j(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=N+1}^{\widetilde{N}} g(\boldsymbol{q}_j,\,t)\varphi_j(\boldsymbol{x})$$

と書ける．ただし，$c_j(t)$ $(1 \leq j \leq N)$ は未知関数である．これを $(\Pi_h)$ に代入し，$(\Pi_h)$ における $v_h$ を $\varphi_i$ $(1 \leq i \leq N)$ とすると，$(\Pi_h)$ は次のように書ける：

$$\sum_{j=1}^{N}\left[b_{ij}\frac{dc_j}{dt}(t) + a_{ij}c_j(t)\right] = f_i(t) - \sum_{j=N+1}^{\widetilde{N}}\left[b_{ij}\frac{\partial g}{\partial t}(\boldsymbol{q}_j,\,t) + a_{ij}g(\boldsymbol{q}_j,\,t)\right] \quad (1 \leq i \leq N).$$

ここで，

$$\begin{aligned} a_{ij} &:= a(\varphi_j,\,\varphi_i) \quad (1 \leq i,\,j \leq \widetilde{N}), \\ b_{ij} &:= (\varphi_j,\,\varphi_i) \quad (1 \leq i,\,j \leq \widetilde{N}), \\ f_i(t) &:= (f(t),\,\varphi_i) \quad (1 \leq i \leq \widetilde{N}) \end{aligned}$$

である．

さらに，

$$\begin{aligned} A &:= (a_{ij})_{1\leq i,\,j\leq N}, \\ B &:= (b_{ij})_{1\leq i,\,j\leq N}, \\ \boldsymbol{f}(t) &:= \left(f_i(t) - \sum_{j=N+1}^{\widetilde{N}}\left[b_{ij}\frac{\partial g}{\partial t}(\boldsymbol{q}_j,\,t) + a_{ij}g(\boldsymbol{q}_j,\,t)\right]\right)_{1\leq i\leq N}, \\ \boldsymbol{c}(t) &:= (c_i(t))_{1\leq i\leq N} \end{aligned}$$

とすると，$(\Pi_h)$ は次のように書ける：

$$(S_h)\begin{cases}\text{Find } \boldsymbol{c} : [0,\,T] \longrightarrow \mathbb{R}^N \text{ such that} \\ B\dfrac{d\boldsymbol{c}}{dt}(t) + A\boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{f}(t), \\ \boldsymbol{c}(0) = \boldsymbol{c}^0.\end{cases}$$

ここで，

$$\begin{aligned} u_h^0(\boldsymbol{x}) &= \sum_{j=1}^{N} c_j^0\varphi_j(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=N+1}^{\widetilde{N}} g(\boldsymbol{q}_j,\,0)\varphi_j(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{c}^0 &:= \left(c_i^0\right)_{1\leq i\leq N} \end{aligned}$$

とした．

### 3.6.2 全離散近似問題

時間微分 $d/dt$ を差分近似する．ここでは，後退 Euler 法によって差分近似することを考える．時間刻幅 $\tau$ として，$t_n := n\tau$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ とする．そして，$\boldsymbol{c}(t_n) \approx \boldsymbol{c}^n$, $\boldsymbol{f}^n := \boldsymbol{f}(t_n)$ とする．この時，$(S_h)$ の近似問題は次のようになる：

$$(S_h^\tau)\left\{\begin{array}{lcl}\text{For each } n = 1, 2 \ldots, \text{ find } \boldsymbol{c}^n \in \mathbb{R}^N \text{ such that} & & \\ B\left(\dfrac{\boldsymbol{c}^{n+1} - \boldsymbol{c}^n}{\tau}\right) + A\boldsymbol{c}^{n+1} & = & \boldsymbol{f}^{n+1}.\end{array}\right.$$

問題 $(S_h^\tau)$ の等式は，

$$(B + \tau A)\boldsymbol{c}^{n+1} = B\boldsymbol{c}^n + \tau\boldsymbol{f}^{n+1} \tag{58}$$

と書ける．

同様の操作を，$(\Pi_h)$ に対して行うことを考える．$u_h(t_n) \approx u_h^n$ とする．この時，$(\Pi_h)$ の近似問題は次のようになる：

$$(\Pi_h^\tau)\left\{\begin{array}{rcll}\multicolumn{4}{l}{\text{For each } n = 1, 2 \ldots, \text{find } u_h^n \in W_h \text{ such that}} \\ \left(\dfrac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\tau}, v_h\right) + a(u_h^{n+1}, v_h) & = & (f(t_{n+1}), v_h) & \forall v_h \in V_h \\ u_h^{n+1} & = & g_h(t_{n+1}) & \text{on } \Gamma_D, \\ u_h(0) & = & u_h^0 & \text{in } \Omega\end{array}\right.$$

問題 $(\Pi_h^\tau)$ の等式は，

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u_h^{n+1} v_h\,dxdy + \int_\Omega \tau\left(\frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x}\frac{\partial v_h}{\partial x} + \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial y}\frac{\partial v_h}{\partial y}\right)dxdy - \int_\Omega u_h^n v_h\,dxdy + \tau\int_\Omega f(t_{n+1})v_h\,dxdy \\ &= \quad 0 \quad \forall v_h \in V_h\end{aligned}$$

と書ける．FreeFEM++ では，この書き方を利用する．

問題 $(P)$ において，$\Omega$ を図 15 の W 型領域とし，$\Gamma_D$ を図 15 の $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ とし，$\Gamma_N$ を残りの境界とする．$f \equiv 0$ とし，$g$ は 3.5 節の (57) とし，$u^0 \equiv 0$ とする．近似問題 $(\Pi_h^\tau)$ を解くソースプログラム（`w-heat.edp`）は以下のようである．

**註記 26** 実際，自分でプログラムを作成する際には，

$$(S_h)\left\{\begin{array}{l}\text{Find } \begin{bmatrix}\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}_D\end{bmatrix} : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^{\widetilde{N}} \text{ such that} \\ \begin{bmatrix}B & O \\ O & O\end{bmatrix}\dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}(t) \\ \boldsymbol{c}_D(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}A & O \\ O & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}(t) \\ \boldsymbol{c}_D(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{f}(t) \\ \boldsymbol{g}(t)\end{bmatrix}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \begin{bmatrix}\boldsymbol{c}(0) \\ \boldsymbol{c}_D(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{c}^0 \\ \boldsymbol{g}(0)\end{bmatrix}.\end{array}\right.$$

を考える．ここで，

$$\boldsymbol{g}(t) := (g(\boldsymbol{q}_j, t))_{N+1 \le j \le \widetilde{N}}$$

ある．すなわち，行列は $\widetilde{N} \times \widetilde{N}$ のサイズで考え，Drichlet 条件の処理を施す．この時，(58) は

$$\begin{bmatrix}B + \tau A & O \\ O & \tau I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}^{n+1} \\ \boldsymbol{c}_D^{n+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}B & O \\ O & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}^n \\ \boldsymbol{c}_D^n\end{bmatrix} + \tau\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}^{n+1} \\ \boldsymbol{g}^{n+1}\end{bmatrix}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{g}^n := \boldsymbol{g}(t_n)$ である．

w-heat.edp

```
int n=10;
real T = 40, tau = 0.1;

border Gamma1(t = 0, 1) {x = -t -3; y = 4;}
border Gamma2(t = 0, 1) {x = -t +4; y = 4;}
border Gamma3(t = 0, 1) {x = 3*t -4; y = -6*t + 4;}
border Gamma4(t = 0, 1) {x = 3*t +1; y = 6*t - 2;}
border Gamma5(t = 0, 1) {x = -2*t -1; y = 4*t;}
border Gamma6(t = 0, 1) {x = -2*t +3; y = -4*t + 4;}
border Gamma7(t = 0, 1) {x = -t; y = -2*t + 2;}
border Gamma8(t = 0, 1) {x = -t+1; y = 2*t;}
border Gamma9(t = 0, 1) {x = t-1; y = 2*t-2;}
border Gamma10(t = 0, 1) {x = t; y = -2*t;}

mesh Th = buildmesh(Gamma1(n)+Gamma2(n)+Gamma3(6*n)+Gamma4(6*n)
                   +Gamma5(4*n)+Gamma6(4*n)+Gamma7(2*n)+Gamma8(2*n)
                   +Gamma9(2*n)+Gamma10(2*n));

fespace Vh(Th, P1);
Vh u=0, v, uold;

problem heat(u, v) = int2d(Th)(u*v + tau*(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v)))
                   - int2d(Th)(uold*v)
                   + on(Gamma1, u=1) + on(Gamma2, u=0);

for(real t=0; t<T; t+=tau){
uold = u;
heat;
plot(u, fill=true);
}
```

## 3.7 Stokes 方程式

有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ において次の Stokes 方程式[13]の境界値問題を考える：

$$(P)\left\{\begin{array}{rcll} -\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p &=& \boldsymbol{f} & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} &=& 0 & \text{in } \Omega, \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) &=& \boldsymbol{g} & \text{on } \Gamma_D, \\ [2\nu\varepsilon(\boldsymbol{u}) - pI]\,\boldsymbol{n} &=& \boldsymbol{t} & \text{on } \Gamma_N. \end{array}\right.$$

ここで，領域 $\Omega$ の境界 $\partial\Omega$ は二つの部分 $\Gamma_D$ と $\Gamma_N$ からなるものとし，$\boldsymbol{n} := (n_1, n_2)$ は外向き単位法線ベクトルである．問題 $(P)$ は，外力 $\boldsymbol{f} := (f_1, f_2)$, 境界での速度 $\boldsymbol{g} := (g_1, g_2)$, 境界での応力 $\boldsymbol{t} := (t_1, t_2)$ が既知の時，流体の流速 $\boldsymbol{u} := (u_1, u_2)$ と圧力 $p$ を求める問題である．また，$\nu$ は粘性係数，$I$ は単位行列であり，$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$ はひずみテンソル[14]で，次

---

[13] Stokes 方程式は流速の遅い非圧縮粘性流体の運動を記述する方程式である．

[14] 変形速度テンソルとも呼ばれる

のように定義される：

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) := [\varepsilon_{i,j}(\boldsymbol{u})]_{1\le i,\,j\le 2} \quad \text{with} \quad \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

この弱形式は

$$(\Pi)\left\{\begin{array}{lcll} \multicolumn{4}{l}{\text{Find } \{\boldsymbol{u},\, p\} \in V(\boldsymbol{g}) \times Q \text{ such that}} \\ 2\nu \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} & = & \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{v}\, d\Gamma_N & \forall \boldsymbol{v} \in V, \\ \displaystyle\int_\Omega q \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, d\boldsymbol{x} & = & 0 & \forall q \in Q. \end{array}\right.$$

ここで，

$$\begin{array}{rcl} V(\boldsymbol{g}) & := & \left\{\boldsymbol{w} \in \left[H^1(\Omega)\right]^2 \mid \boldsymbol{w} = \boldsymbol{g} \text{ on } \Gamma_D\right\}, \\ V & := & \left\{\boldsymbol{v} \in \left[H^1(\Omega)\right]^2 \mid \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ on } \Gamma_D\right\}, \\ Q & := & L^2(\Omega). \end{array}$$

領域 $\Omega$ を図 18 のような流入口付き W 型領域とする．境界に図 18 のようにラベルをつける．境界 $\Gamma_N := \Gamma_2$, 境界 $\Gamma_D$ をその他の部分としする．既知データは $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{o}$,

$$\boldsymbol{g} = \left\{\begin{array}{lll} \left(-\frac{a}{4}(y-4)(y-5),\, 0\right) & \text{on} & \Gamma_{11}\,\text{（流入口ではポアズイユ流れとする）}, \\ \qquad\quad \boldsymbol{o} & \text{on} & \Gamma_D\text{のその他の部分} \end{array}\right.$$

とする．

この時，(Π) の二つの等式はまとめて，次のように書けることに注意する：

$$\begin{aligned} 2\nu \int_\Omega \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial v_2}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial v_1}{\partial y}\right) dxdy \\ - \int_\Omega p\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) dxdy + \int_\Omega q\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) dxdy \quad = \quad 0 \quad \forall (v_1,\, v_2,\, q) \in V \times Q. \end{aligned}$$

FreeFEM++ ではこの書き方を用いる．

**註記 27** Stokes 問題の有限要素計算では，$V$ と $Q$ を近似する有限要素空間 $V_h$ と $Q_h$ を適切な組み合わせで選ばなくてはならない．

○ $V_h$:P2, $Q_h$:P1

× $V_h$:P1, $Q_h$:P1

これらの適切性を判断するために数理解析は非常に有効である．

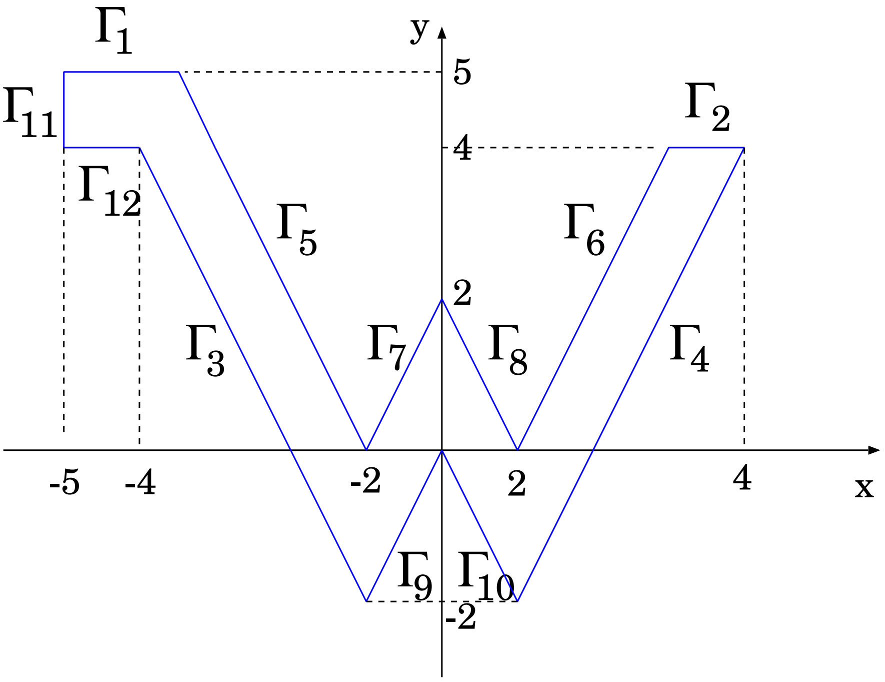


図 18: 流入口付き W 型領域と境界ラベル

w-stokes.edp

```
int n=5;
real a=10;
real nu = 1.0;
func ud = -a*0.25*(y-4)*(y-5);

border Gamma1(t = 0, 1) {x = -1.5*t -3.5; y = 5;}
border Gamma2(t = 0, 1) {x = -t +4; y = 4;}
border Gamma3(t = 0, 1) {x = 3*t -4; y = -6*t + 4;}
border Gamma4(t = 0, 1) {x = 3*t +1; y = 6*t - 2;}
border Gamma5(t = 0, 1) {x = -2.5*t -1; y = 5*t;}
border Gamma6(t = 0, 1) {x = -2*t +3; y = -4*t + 4;}
border Gamma7(t = 0, 1) {x = -t; y = -2*t + 2;}
border Gamma8(t = 0, 1) {x = -t+1; y = 2*t;}
border Gamma9(t = 0, 1) {x = t-1; y = 2*t-2;}
border Gamma10(t = 0, 1) {x = t; y = -2*t;}
border Gamma11(t = 0, 1) {x = -5; y = -t+5;}
border Gamma12(t = 0, 1) {x = t-5; y = 4;}

mesh Th = buildmesh(Gamma1(1.5*n)+Gamma2(n)+Gamma3(6*n)+Gamma4(6*n)
                   +Gamma5(5*n)+Gamma6(4*n)+Gamma7(2*n)+Gamma8(2*n)
                   +Gamma9(2*n)+Gamma10(2*n)+Gamma11(n)+Gamma12(n));

fespace Vh(Th,P2); Vh u1,u2,v1,v2;
fespace Qh(Th,P1); Qh p,q;

solve stokes([u1,u2,p],[v1,v2,q],solver=UMFPACK) =
    int2d(Th)(2*nu*(dx(u1)*dx(v1) + dy(u2)*dy(v2)
+0.5*(dy(u1)*dy(v1) + dx(u2)*dx(v2) + dy(u1)*dx(v2) + dx(u2)*dy(v1)))
          - p*(dx(v1)+dy(v2)) + q*(dx(u1)+dy(u2)))
            + on(1,3,4,5,6,7,8,9,10,12,u1=0,u2=0) + on(11,u1=ud,u2=0);

plot([u1,u2],p,wait=1,ps="w-stokes.eps");
```

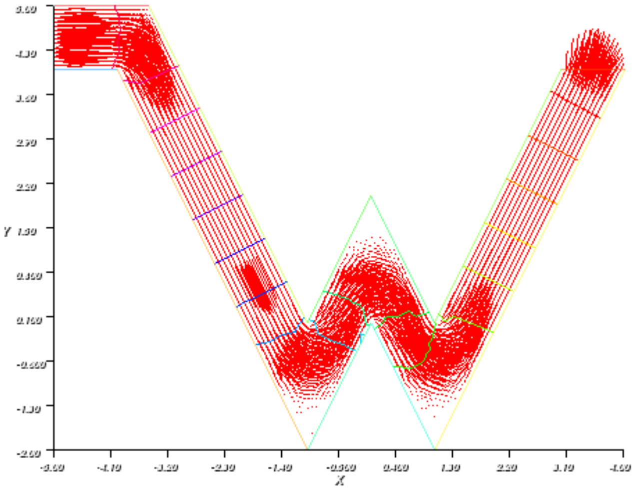


図 19: `w-stokes.edp` の出力結果

# 4　連立一次方程式の数値解法

連立一次方程式

$$
(59)\quad \begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+ & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+ & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & & & \vdots \\
a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+ & \cdots & +a_{nn}x_n & = & b_n
\end{cases}
$$

を解く．ここで、$a_{ij}, b_i\ (1 \leq i, j \leq n)$ は既知であり，$x_j\ (1 \leq j \leq n)$ は未知数である．

(59) 式は $n \times n$ 行列 $A$, $n$ 次元ベクトル $\boldsymbol{b}$, $n$ 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を用いて，

$$(60)\quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表わされる．

## 4.1　LU 分解を用いた連立一次方程式の解法

**LU** 分解を用いて，連立一次方程式 (60) を解くプロセスは次の 3 段階に分けられる．

1. **LU 分解：**　係数行列 $A$ を下三角行列 $L$ と上三角行列 $U$ の積に分解する．

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad LU\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$
(61)\quad L \quad = \quad \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
l_{21} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\
l_{n1} & l_{n2} & & \cdots & l_{n,n-1} & 1
\end{bmatrix},
$$

$$
(62)\quad U \quad = \quad \begin{bmatrix}
u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \cdots & u_{1n} \\
0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \cdots & u_{2n} \\
0 & 0 & u_{33} & u_{34} & \cdots & u_{3n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \ddots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\
0 & 0 & & \cdots & 0 & u_{nn}
\end{bmatrix}.
$$

2. **前進消去：**　$\boldsymbol{y} \equiv U\boldsymbol{x}$ とおき，$LU\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ と書き，これを解き，$\boldsymbol{y}$ を求める．
3. **後退代入：**　$U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ を解き，$\boldsymbol{x}$ を求める．

この方法の一つの利点は，同じ行列で $\boldsymbol{b}$ を変えて答を求める場合[15]，手間のかかる LU 分解は一度だけ行い，前進消去と後退代入だけ何度も行うということができることである．

---

[15] 偏微分方程式の時間発展問題（非定常問題）を有限要素法で計算するときなどに生ずる (式 (58) 参照).

## 4.2　LU 分解

正則行列 $A$ を LU 分解することを考える．LU 分解のアルゴリズムを説明するために，形式的に，$A$ を $A^{(1)}$ と書き，$A$ の $(i,\,j)$ 成分 $a_{ij}$ を $a_{ij}^{(1)}$ と書くことにする：

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

$a_{11}^{(1)}$ をかなめとして 1 列目を掃き出す．すなわち，次の操作を行なう：

- 1 行目の $-\dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ 倍を 2 行目に加える．(実は，$l_{21} = \dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ となる．)
- 1 行目の $-\dfrac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ 倍を 3 行目に加える．(同様に，$l_{31} = \dfrac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ となる．)

$$\vdots$$

$$\vdots$$

- 1 行目の $-\dfrac{a_{n1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ 倍を $n$ 行目に加える．(同様に，$l_{n1} = \dfrac{a_{n1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ となる．)

すると，次のような行列が得られる：

$$A^{(2)} := \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

ここで，一般に，行列 $A$ の第 $i$ 行目の $c$ 倍を第 $j$ 行目に加えるという（左）基本変形を表す基本行列は次のようになることを思い出そう：

$$R_{ji}(c) := E + c\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i^T.$$

ここで，$E$ は単位行列であり，$\boldsymbol{e}_j$ は第 $j$ 成分が 1 の単位ベクトル（縦ベクトルとする）．行列 $c\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i^T$ は次のように書かれる：

$$c\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i^T = \begin{array}{r|cccccccccc|} & & & & \text{第 } i \text{ 列} & & & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & & \\ & & & & \vdots & & & & & & \\ & & & & \vdots & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & & \\ \text{第 } j \text{ 行} \rightarrow & 0 & \cdots & 0 & c & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & & 0 & & & & & & \\ & & & & \vdots & & & & & & \\ & & & & \vdots & & & & & & \\ & & & & \vdots & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & & \end{array}.$$

いま，

$$m_{j1} := a_{j1}^{(1)}/a_{11}^{(1)} \quad (2 \leq j \leq n) \quad (a_{11}^{(1)} \neq 0 \text{ とする})$$

とおくと，

$$A^{(2)} = R_{n1}(-m_{n1}) \cdots R_{21}(-m_{21})A^{(1)} = M_1 A^{(1)}$$

となる．ここで，

$$M_1 := R_{n1}(-m_{n1}) \cdots R_{21}(-m_{21})$$

とした．

同様に，$A^{(2)}$ において，$a_{22}^{(2)}$ をかなめとして，2 列目の 3 行目以下をはき出して得られる行列を $A^{(3)}$ とすれば，

$$A^{(3)} = R_{n2}(-m_{n2}) \cdots R_{32}(-m_{32})A^{(2)} = M_2 A^{(2)}$$

となる．ここで，

$$m_{j2} := a_{j2}^{(2)}/a_{22}^{(2)} \quad (3 \leq j \leq n) \quad (a_{22}^{(2)} \neq 0 \text{ とする}),$$

$$M_2 := R_{n2}(-m_{n2}) \cdots R_{32}(-m_{32})$$

である．

この操作を順に繰り返していくと，

$$(63) \quad A^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{n-1n-1}^{(n-1)} & a_{n-1n}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

に到達する．この行列は

$$(64) \quad A^{(n)} = M_{n-1} \cdots M_1 A^{(1)}$$

と書ける．ここで，

$$(65) \quad m_{jk} := a_{jk}^{(k)}/a_{kk}^{(k)} \quad (k+1 \leq j \leq n) \quad (a_{kk}^{(k)} \neq 0 \text{ とする}),$$

$$(66) \quad M_k := R_{n\,k}(-m_{n\,k}) \cdots R_{k+1\,k}(-m_{k+1\,k}) \quad (1 \leq k \leq n-1)$$

である．

いま，(64) より，

$$M_1^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1} A^{(n)} = A^{(1)}$$

となり，

$$(67) \quad L := M_1^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1}, \qquad U := A^{(n)}$$

とおくと，

$$LU = A$$

となる．

**註記 28** 上記の説明では，$a_{kk}^{(k)} \neq 0$ $(1 \leq k \leq n-1)$ を仮定している．すなわち，ピボット (pivot) 選択する必要のない場合を考えていることに注意せよ．

**註記 29** 式 (63) と (67) から

(68) $a_{kk}^{(k)} = u_{kk} \quad (1 \leq k \leq n)$

となる．

行列 $L$ の成分

前でも少し触れたが，行列 $L$ の $(j, k)$ 成分 $(j > k)$ は，

$$l_{jk} = m_{jk} \equiv a_{jk}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$$

で与えられる．このことは，下の問 30–問 32 を解くことによって理解できる．

**演習問題 30** $i \neq j$ の時，$R_{ji}(c)$ の逆行列は $R_{ji}(-c)$ となることを示せ．（ヒント：$\boldsymbol{e}_i^T \boldsymbol{e}_j = 0$ $(i \neq j)$.）

**演習問題 31** 式 (66) によって定義される行列 $M_k$ が

$$M_k = E - \sum_{j=k+1}^{n} m_{jk} \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k^T$$

となることを示せ．また，$M_k$ がどのような行列になるか，$m_{jk}$ を使って図示せよ．さらに，

(69) $M_k^{-1} = E + \displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} m_{jk} \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k^T$

となることを示せ．

**演習問題 32** 式 (67) と (69) を使って，行列 $L$ が

$$L = E + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} m_{jk} \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k^T$$

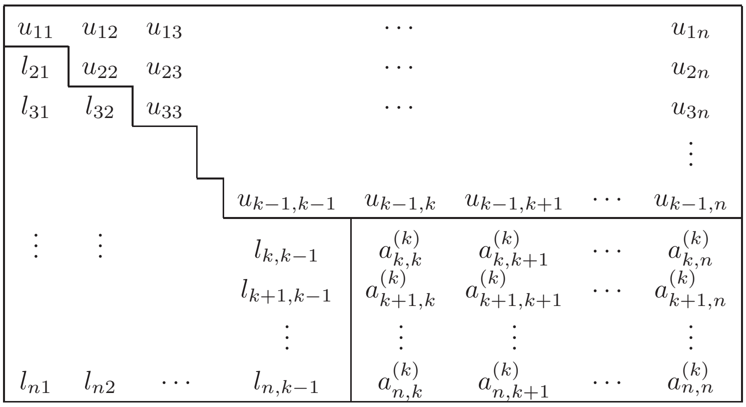
となることを示せ．また，$L$ がどのような行列になるか，$m_{jk}$ を使って図示せよ．

### 4.2.1 LU 分解のアルゴリズム（プログラミング用）

```
○ $a_{ij}^{(1)} := a_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n$
□ $k := 1, \ldots, n$ について
    (A)
    ○ $u_{kj} := a_{kj}^{(k)}, \quad k \leq j \leq n$
    □ $i := k+1, \ldots, n$ について
        $l_{ik} := a_{ik}^{(k)} / u_{kk}$
        □ $j := k+1, \ldots, n$ について
            $a_{ij}^{(k+1)} := a_{ij}^{(k)} - l_{ik} u_{kj}$
    (B)
```

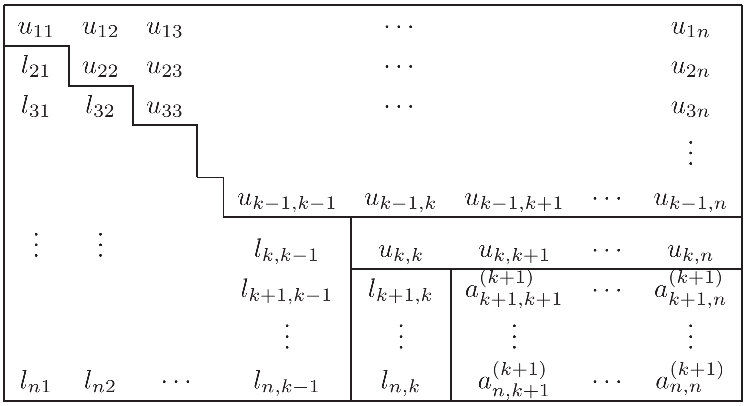
となる．行列 $A$, $L$, $U$, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, …, $A^{(n)}$ は，プログラムでは同じ配列に割り当てることができる．このとき，○ の部分はプログラムには現れない．また，$k$ に関する繰り返しも $n-1$ で良い．(**A**) の部分での配列の内容は図 1 であり，(**B**) の部分での配列の内容は図 2 である．

```
DO k = 1, ..., n-1
  DO i = k+1, ..., n
    a[i, k] = a[i, k]/a[k, k]
    DO j = k+1, ..., n
      a[i, j] = a[i, j] - a[i, k]*a[k, j]
    ENDDO
  ENDDO
ENDDO
```



$$\begin{array}{cccccccc}
u_{11} & u_{12} & u_{13} & & \cdots & & & u_{1n}\\
l_{21} & u_{22} & u_{23} & & \cdots & & & u_{2n}\\
l_{31} & l_{32} & u_{33} & & \cdots & & & u_{3n}\\
 & & & & & & & \vdots\\
 & & & u_{k-1,k-1} & u_{k-1,k} & u_{k-1,k+1} & \cdots & u_{k-1,n}\\
\vdots & \vdots & & l_{k,k-1} & a^{(k)}_{k,k} & a^{(k)}_{k,k+1} & \cdots & a^{(k)}_{k,n}\\
 & & & l_{k+1,k-1} & a^{(k)}_{k+1,k} & a^{(k)}_{k+1,k+1} & \cdots & a^{(k)}_{k+1,n}\\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,k-1} & a^{(k)}_{n,k} & a^{(k)}_{n,k+1} & \cdots & a^{(k)}_{n,n}
\end{array}$$

図 1. (**A**) の時点での配列の内容



$$\begin{array}{cccccccc}
u_{11} & u_{12} & u_{13} & & \cdots & & & u_{1n}\\
l_{21} & u_{22} & u_{23} & & \cdots & & & u_{2n}\\
l_{31} & l_{32} & u_{33} & & \cdots & & & u_{3n}\\
 & & & & & & & \vdots\\
 & & & u_{k-1,k-1} & u_{k-1,k} & u_{k-1,k+1} & \cdots & u_{k-1,n}\\
\vdots & \vdots & & l_{k,k-1} & u_{k,k} & u_{k,k+1} & \cdots & u_{k,n}\\
 & & & l_{k+1,k-1} & l_{k+1,k} & a^{(k+1)}_{k+1,k+1} & \cdots & a^{(k+1)}_{k+1,n}\\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,k-1} & l_{n,k} & a^{(k+1)}_{n,k+1} & \cdots & a^{(k+1)}_{n,n}
\end{array}$$

図 2. (**B**) の時点での配列の内容

## 4.3 前進消去・後退代入

### 4.3.1 前進消去のアルゴリズム（プログラミング用）

$L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ を解く：

$i := 1, \ldots, n$ について

$$\left[\; y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \right.$$

ベクトル $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{y}$ は，プログラムでは同じ配列に割り当てることができる．これにより，$i$ に関する繰り返しは 2 から始めれば良い．

```
DO i = 2, ..., n
  DO j =1, ..., i-1
    b[i] = b[i] - a[i, j]*b[j]
  ENDDO
ENDDO
```

### 4.3.2　後退代入のアルゴリズム（プログラミング用）

$U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ を解く：

```
$i := n, \ldots, 1$ について
[ $x_i = (y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j)/u_{ii}$
```

ベクトル $\boldsymbol{x}$ も，$\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{y}$ を保存するのに用いた配列を用いることができる．

```
DO i = n, ..., 1
  DO j = i+1, ..., n
    b[i] = b[i] - a[i, j]*b[j]
  ENDDO
  b[i] = b[i]/a[i, i]
ENDDO
```

### 4.3.3　ピボット選択

前述の LU 分解アルゴリズムでは $u_{kk}$ $(= a_{kk}^{(k)})$ で割っている．そのため $u_{kk}$ が 0 になると，結果を得ることが出来ない．また，$u_{kk}$ の絶対値が小さい場合は桁落ちが起きやすい．これらのことを防ぐために，絶対値が大きいものを選んで，それで割るようにする．これをピボット選択という．

ピボット選択を行うには，適当に行列 $A$ の行または列を入れかえる必要がある．行の入れかえは連立一次方程式の式を並べる順番を変えることに相当し，既知ベクトル ($A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{b}$) の順番も変える必要がある．一方，列の入れかえは未知数の順番を変えることに相当し，未知ベクトル $\boldsymbol{x}$ の順番を変える必要がある．(行列の行と列の両方を入れかえる方法もあり，その場合は $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ の両方の順番を変える必要がある．)

なお，プログラム上では実際には入れかえを行わず，インデックス（どの行を入れかえたかを表す配列）を用いる方法もある．

行の入れかえによりピボット選択を行う LU 分解の算法（の一つ）は，前述の LU 分解アルゴリズムと同じ記号を使うと次のようになる．

```
○ $a_{ij}^{(1)} := a_{ij}, \quad 1 \le i, j \le n$
□ $k := 1, \ldots, n$ について
[ (A)
  $a_{ik}^{(k)} (k \le i \le n)$ の中で絶対値最大のものを $a_{i_k k}^{(k)}$ とする．
  $A, L, U, \boldsymbol{b}$ について第 $k$ 行と第 $i_k$ 行を入れ替える．
  ○ $u_{kj} := a_{kj}^{(k)}, \quad k \le j \le n$
  □ $i := k+1, \ldots, n$ について
  [ $l_{ik} := a_{ik}^{(k)} / u_{kk}$
    □ $j := k+1, \ldots, n$ について
    [ $a_{ij}^{(k+1)} := a_{ij}^{(k)} - l_{ik} u_{ik}$
  (B)
```

インデックスを使うことにより，$\boldsymbol{b}$ についての入れかえは LU 分解の時には行わず，前進消去と後退代入の際に行うようにできる．

## 4.4　LU 分解の数理

**定義 33**　$n \times n$ 行列 $A$ に対して，対角成分が 1 となる下三角行列 $L$ (cf. (61)) と上三角行列 $U$ (cf. (62)) が存在して，$A = LU$ と書ける時，LU 分解可能であると言う．

**命題 34**　正則な $n \times n$ 行列 $A$ が $LU$ 分解可能な時，

$$u_{kk} \neq 0 \quad (1 \leq k \leq n)$$

が成り立つ．

**証明．**

$$0 \neq \det A = (\det L)(\det U) = u_{11} \cdots u_{nn}. \quad \blacksquare$$

**命題 35**　正則な $n \times n$ 行列 $A$ が $LU$ 分解可能な時，その分解は一意的である．

**証明．**

$$A = LU = \widetilde{L}\widetilde{U}$$

とする．この時，

$$\widetilde{L}^{-1}L = \widetilde{U}U^{-1}$$

よって，この左辺は下三角行列，右辺は上三角行列であるので，両辺とも対角行列でなくてはならない．さらに，左辺の対角成分は全て 1 であることも分るので，結局，その対角行列は単位行列である．これより，$L = \widetilde{L}, U = \widetilde{U}$ が得られる．　$\blacksquare$

**命題 36**　正則な $n \times n$ 行列 $A$ $(n \geq 2)$ に対し，

(70)　LU 分解可能 $\Longleftrightarrow a_{kk}^{(k)} \neq 0 \quad (1 \leq k \leq n-1)$

が成り立つ．

**証明．** $(\Longleftarrow)$ LU 分解のアルゴリズムから明らか．

$(\Longrightarrow)$ $n$ に関する帰納法によって示す．

$n = 2$ の時，

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$$

となり，$a_{11}^{(1)} = u_{11}$ である．また，

$$\det A = \det U = u_{11}u_{22}$$

であり，$A$ は正則であるから，$a_{11}^{(1)} \neq 0$ でなくてはならない．

$n-1$ $(n \geq 3)$ の時を仮定して，$n$ の時を示す．$A$ は LU 分解できるので，

$$A = \begin{bmatrix} L_{n-1} & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{l}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{n-1} & \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{o}^T & u_{nn} \end{bmatrix}$$

と書ける．ここで，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{o} \in \mathbb{R}^{n-1}$ である．これより，

$$A = \begin{bmatrix} L_{n-1}U_{n-1} & L_{n-1}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{l}^T U_{n-1} & \boldsymbol{l}^T\boldsymbol{u} + u_{nn} \end{bmatrix}$$

となるので，$A_{n-1}$ は LU 分解可能である．ここで，$A_{n-1}$ は $A$ の最初の $n-1$ 行，$n-1$ 列からなる行列である．さらに，$A_{n-1}$ は正則であることも分かる．実際，$\det A_{n-1} = u_{11} \cdots u_{n-1,n-1}$ であり，$\det A = u_{11} \cdots u_{n-1,n-1} u_{n,n} \neq 0$ より，$\det A_{n-1} \neq 0$ となるからである．よって，帰納法の仮定より，

(71) $a_{kk}^{(k)} \neq 0 \quad (1 \leq k \leq n-2)$

が成立する．これより，$A_{n-1}$ の LU 分解は LU 分解アルゴリズムで得られることが分かる．よって，$a_{n-1,n-1}^{(n-1)} = u_{n-1,n-1}$ となるので，前述より $u_{n-1,n-1} \neq 0$ なので，$a_{n-1,n-1}^{(n-1)} \neq 0$ であることも分かる． ■

**命題 37** 正則な $n \times n$ 行列 $A$ が LU 分解可能である時，

(72) $\det A_k = a_{11}^{(1)} \cdots a_{kk}^{(k)} \quad (1 \leq k \leq n)$

が成り立つ．ここで，

(73) $$A_k := \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

である．

**証明**．任意の $1 \leq k \leq n$ に対して，$A_k$ は LU 分解可能であるので，

(74) $$L_k := \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ l_{k1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad U_k := \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1k} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & u_{kk} \end{bmatrix}$$

とすると，

(75) $A_k = L_k U_k$

が成り立つ．これより，

(76) $\det A_k = \det L_k \det U_k = \det U_k$

が成り立つ．(68) より，

(77) $\det U_k = u_{11} \cdots u_{kk} = a_{11}^{(1)} \cdots a_{kk}^{(k)}$

を得る．したがって，(76)，(77) より，(72) を得る． ■

**命題 38** 正則な $n \times n$ 行列 $A$ $(n \geq 2)$ に対し，

(78) LU 分解可能 $\Longleftrightarrow \det A_k \neq 0 \quad (1 \leq k \leq n-1)$

が成り立つ．

**証明**．($\Longrightarrow$) 命題 36 と (72) から明らか．

($\Longleftarrow$) $n$ に関する帰納法によって示す．

$n = 2$ の時，$0 \neq \det A_1 = a_{11} = a_{11}^{(1)}$ であるので，命題 36 から $A$ は LU 分解可能であることが分かる．

$n-1$ $(n \geq 3)$ の時を仮定して，$n$ の時を示す．帰納法の仮定より，$A_{n-1}$ は LU 分解可能である．また，$\det A_{n-1} \neq 0$ を仮定しているので，$A_{n-1}$ は正則．よって，(72) から，

$$\det A_{n-1} = a_{11}^{(1)} \cdots a_{n-1,n-1}^{(n-1)}$$

となるので，$a_{kk}^{(k)} \neq 0$ $(1 \leq k \leq n-1)$ となることが分かる．したがって，命題 36 から $A$ は LU 分解可能であることが分かる． ■

**注記 39** 行列 $A$ が正定値対称行列の時，$A_k$ $(1 \le k \le n)$ も正定値対称行列なので，$\det A_k > 0$ $(1 \le k \le n)$ が成り立つ[16]．ゆえに，命題 38 より，$A$ は LU 分解可能である．よって，命題 36 より，$a_{kk}^{(k)} \neq 0$ $(1 \le k \le n-1)$ が成立する．すなわち，正定値対称行列の LU 分解を求める時，ピボット選択付きの LU 分解プログラムは必要ない．

## 4.5 修正 Cholesky 分解と Cholesky 分解

正則な行列 $A$ が対称行列で LU 分解可能な時，対角行列 $D$ を

$$D := [u_{i,i}]_{1 \le i \le n}$$

で定義すると，

(79) $U = DL^T, \quad (1 \le i \le n)$

が成り立つ (演習問題 40)．すなわち，

(80) $A = LDL^T$

となる．この分解を行列 $A$ の $LDL^T$ 分解または修正 Cholesky 分解と呼ぶ．(79) より，$U$ が分っていれば，$L$ も分ることになる．すなわち，

(81) $l_{i,j} = u_{j,i}/u_{j,j} \quad (i > j)$

なる関係がある．

さらに，行列 $A$ が正定値対称行列の場合は，

$$\begin{array}{rcl} D^{1/2} & := & \left[\sqrt{u_{i,i}}\right]_{1 \le i \le n} \\ \widehat{L} & := & LD^{1/2} \end{array}$$

として，

(82) $A = \widehat{L}\widehat{L}^T$

と分解できる．この分解は Cholesky 分解と呼ばれる．行列 $A$ が正定値対称行列の場合は，$u_{i,i} > 0$ $(1 \le i \le n)$ となることに注意せよ．実際，(72) より，

$$u_{i,i} = a_{ii}^{(i)} = \frac{\det A_i}{\det A_{i-1}} \quad (1 \le i \le n)$$

が成立するからである．ここで，$\det A_0 = 1$ とした．

**演習問題 40** 正則な対称行列 $A$ が LU 分解可能な時，(79) を示せ．

## 4.6 対称帯 (バンド) 行列に対する LU 分解・前進消去・後退代入

注記 16 で述べたように有限要素法で現れる全体係数行列 $\widetilde{A}$ は**疎行列** (非零になる成分が少ない行列) になる．さらに，互いに近くにある節点にはなるべく近い節点番号を付けることによって，全体係数行列 $\widetilde{A}$ は帯 (バンド) 行列になる．以後，簡単のため $\widetilde{A}$ を $A$ と書き，$n \times n$ 行列であるとする．行列 $A$ が帯行列であるとは，次が成り立つ時である: ある $n_b$ $(< n-1)$ が存在して，

$$|i-j| > n_b \Longrightarrow [A]_{i,j} = 0.$$

---

[16] 正定値対称行列 $A$ の行列式は正であることは，$A$ が直交行列により対角化でき，$A$ の固有値は全て正であることから分かる．

すなわち，次のようになる：

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n_b+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n_b+1,1} & & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & & a_{n-n_b,n} \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-n_b} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

ここで，$n_b$ を半帯 (バンド) 幅と呼ぶ．例えば，三重対角行列の半帯幅は 1 である．

帯行列 $A$ を LU 分解すると行列 $L$，$U$ も帯行列になる：

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ l_{n_b+1,1} & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{n,n-n_b} & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,n_b+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & 0 \\ & \ddots & & \ddots & & u_{n-n_b,n} \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & u_{n,n} \end{bmatrix}.$$

帯幅が十分小さい時，$n \times (n_b + 1)$ の配列：`a[1:n, 1:nb+1]` を用意して，$A$ の対角成分とその上の成分を記憶する．すなわち，

$a_{i,j}$ $(i \le j)$ を `a[i, 1+(j-i)]` に

記憶させる．

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n_b+1} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & & a_{n-n_b,n} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & a_{n,n} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n_b+1} \\ a_{2,2} & \cdots & a_{2,n_b+2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-n_b,n-n_b} & \cdots & a_{n-n_b,n} \\ \vdots & & \\ a_{n,n} & & \end{bmatrix}.$$

すると記憶容量を節約することができる．

前述の LU 分解のアルゴリズムを少修正すると，最終的に $U$ の成分 $u_{i,j}$ $(i \le j)$ が `a[i, 1+(j-i)]` に保存されるようにできる．

### 4.6.1 帯行列に対する LU 分解アルゴリズム

```
DO k = 1, ..., n-1
```

```
  DO i = k+1, ..., min(n, k+nb)
    l = a[k, 1+(i-k)]/a[k, 1]
    DO j = i, ..., min(n, k+nb)
      a[i, 1+(j-i)] = a[i, 1+(j-i)] - l*a[k, 1+(j-k)]
    ENDDO
  ENDDO
ENDDO
```

### 4.6.2　帯行列に対する前進消去アルゴリズム

```
DO i = 2, ..., n
  DO j = max(1, i-nb), ..., i-1
    b[i] = b[i] - a[j, 1+(i-j)]/a[j, 1]*b[j]
  ENDDO
ENDDO
```

### 4.6.3　帯行列に対する後退代入アルゴリズム

```
DO i = n, ..., 1
  DO j = i+1, ..., min(i+nb, n)
    b[i] = b[i] - a[i, 1+(j-i)]*b[j]
  ENDDO
  b[i] = b[i]/a[i, 1]
ENDDO
```

**註記 41** 要素・節点対応表から半帯幅 $n_b$ の値を知ることができる．すなわち，

$$n_b = \max_{1\le m\le M} \max\{|i_m - j_m|, |j_m - k_m|, |k_m - i_m|\}.$$

ここで，三角形要素 $K_m$ $(1 \le m \le M)$ の節点の番号を $i_m, j_m, k_m$ とした．例として，図 20 を見よ．

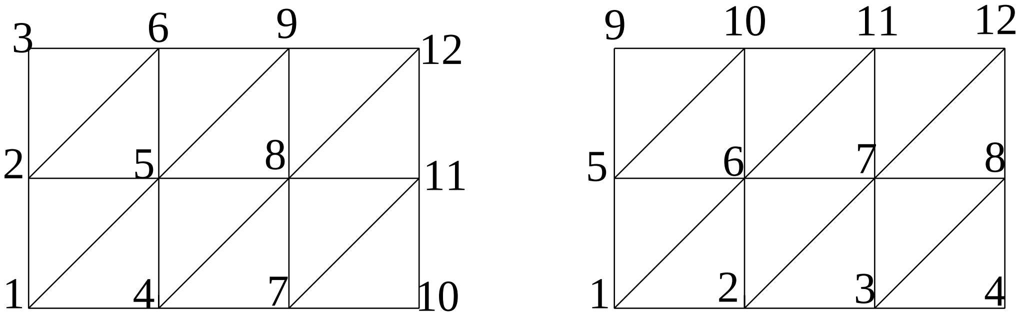


図 20: 左図：$n_b = 4$; 右図 $n_b = 5$.

## 4.7　共役勾配法

前述のように帯行列を利用しても，計算機のメモリが足りないような場合は共役勾配法 (Conjugate Gradient method; CG 法) などを用いる．

### 4.7.1 CG 法アルゴリズム

(i) 適当な初期ベクトル $\boldsymbol{x}_0$ を選んで次の操作をする:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_0 &:= \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{p}_0 &:= \boldsymbol{r}_0 \end{aligned}$$

(ii) $k = 0, 1, \ldots$ に対して次の手順を繰り返す:

$$\begin{aligned} \alpha_k &:= \frac{(\boldsymbol{r}_k,\, \boldsymbol{r}_k)}{(\boldsymbol{p}_k,\, A\boldsymbol{p}_k)} \\ \boldsymbol{x}_{k+1} &:= \boldsymbol{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{p}_k \\ \boldsymbol{r}_{k+1} &:= \boldsymbol{r}_k - \alpha_k A\boldsymbol{p}_k \end{aligned}$$

$$\frac{\|\boldsymbol{r}_{k+1}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} < \varepsilon \text{ ならば終了.}$$

$$\begin{aligned} \beta_k &:= \frac{(\boldsymbol{r}_{k+1},\, \boldsymbol{r}_{k+1})}{(\boldsymbol{r}_k,\, \boldsymbol{r}_k)} \\ \boldsymbol{p}_{k+1} &:= \boldsymbol{r}_{k+1} + \beta_k \boldsymbol{p}_k \end{aligned}$$

**註記 42** 丸め誤差が無ければ上記のアルゴリズムは，多くても $k = n - 2$ で収束する ([8] 参照).

CG 法アルゴリズムで行列 $A$ が必要になる部分は，行列 $A$ とベクトルの掛け算のみなので，行列 $A$ の非零成分だけ計算機の中で記憶しておけば良い．非零成分の記憶方式としては，例えば，Compressed Sparse Row (CSR) format がある ([10] 参照)．CSR フォーマットを一つの具体例をとって説明する．行列 $A$ が

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{bmatrix}$$

の場合を考える．ここで，行列サイズ $n = 5$，非零成分の数 $n_z = 12$ である．

行列 $A$ を CSR フォーマットで記憶するために，まず，$A$ の非零要素に以下のように第 1 行目から順に，左から右へ番号付けをする：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

次に，3 つの配列 `aa[1:nz]`, `ja[1:nz]`, `ia[1:n+1]` を使って，$A$ の非零要素を記憶する（表 7, 8 参照）.

表 7: CSR フォーマットで用いる配列

| | |
|---|---|
| `aa[i]`: | 第 `i` 番目の非零要素の値 |
| `ja[i]`: | 第 `i` 番目の非零要素の列番号 |
| `ia[i]`: | 第 `i-1` 行目までの非零要素の数 +1 ($1 \leq i \leq n+1$) |

表 8: 行列 $A$ の CSR フォーマット

| 非零要素の番号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| `aa[1:nz]` | $a_{11}$ | $a_{14}$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{24}$ | $a_{31}$ | $a_{33}$ | $a_{34}$ | $a_{35}$ | $a_{43}$ | $a_{44}$ | $a_{55}$ |
| `ja[1:nz]` | 1 | 4 | 1 | 2 | 4 | 1 | 3 | 4 | 5 | 3 | 4 | 5 |
| `ia[1:n+1]` | 1 | 3 | 6 | 10 | 12 | 13 | | | | | | |

**註記 43** 全ての要素が零であるような行がなければ，`ia[i]` は，次のように言った方が分かり易い：

第 `i` 行目の先頭の非零要素の番号．ただし，`ia[n+1]=nz+1` とする．

**註記 44** 配列 `id[1:n]` を用意して，対角要素の非零要素番号を記憶しておくと，Dirichlet 条件の処理で対角成分を 1 にする時に役立つ（表 9 参照）．

表 9: 対角要素の非零要素番号の記憶

| `id[1:n]` | 1 | 4 | 7 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|

#### 4.7.2 CSR フォーマットを使用した際の行列・ベクトル積アルゴリズム

$\boldsymbol{q} = A\boldsymbol{p}$ のアルゴリズムを以下に記す．

```
DO i = 1, ..., n
  DO j = ia[i], ..., ia[i+1]-1
    q[i] = q[i] + a[j]*p[ja[j]]
  ENDDO
ENDDO
```

#### 4.7.3 前処理

CG 法などの反復法は実際には何らかの有効な前処理技術とともに使用される．
行列 $A$ が正定値対称行列の場合，その前処理の一例を示す．適当な正則行列 $C$ を選び，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を

$$C^{-1}AC^{-T}C^{T}\boldsymbol{x} = C^{-1}\boldsymbol{b}$$

と変形する．ここで，

$$\widetilde{A} := C^{-1}AC^{-T}, \quad \widetilde{\boldsymbol{x}} := C^{T}\boldsymbol{x}, \quad \widetilde{\boldsymbol{b}} := C^{-1}\boldsymbol{b}$$

とすると，

$$(83) \quad \widetilde{A}\widetilde{\boldsymbol{x}} = \widetilde{\boldsymbol{b}}$$

と書け，行列 $\widetilde{A}$ も正定値対称行列になるので，(83) に共役勾配法を適用する．これを前処理付き共役勾配法と呼ぶ．
行列 $C$ は前処理行列と呼ばれ，一般に，

$$(84) \quad CC^{T} \approx A$$

となるように，また $(CC^T)^{-1}$ の計算が負担が軽くなるように選ばれる．(84) が成立する時，

$$\widetilde{A} \approx I$$

となるので，$\widetilde{A}$ に共役勾配法を適用すると，収束までにかかる反復回数が減り，計算時間を短縮を短縮できる可能性がある．

行列 $C$ の一例としては，$A$ を不完全 Cholesky 分解 (Imcomplete Cholesky decomposition) することによって得られる行列を $C$ とする．この時，前処理付き共役勾配法は特に ICCG 法 (Imcomplete Cholesky Conjugate Gradient method) と呼ばれる（[11, 12] を見よ）．

その他の前処理については，[10] 等を見よ．

# 5　いろいろな有限要素

## 5.1　Ciarlet による有限要素の定義 [14, 15]

有限要素とは 3 つの組 $(K, P_K, \Sigma)$

- $K$: 要素の形状
- $P_K$: $K$ 上で定義された関数からなる有限次元線形空間
- $\Sigma$: $P_K$ の関数を一意的に定めるための自由度

これまでに説明してきた 2 次元領域の三角形分割上の区分 1 次多項式に対応する 3 つの組 $(K, P_K, \Sigma)$ は，次のように書かれ，$P1$ 要素と呼ばれる．

- $K$: 三角形．
- $P_K = \{v(x, y) = ax + by + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.
- $\Sigma = \left\{v(\boldsymbol{q}^j) \mid 1 \leq j \leq 3\right\}$. ここで，$\boldsymbol{q}^j$ $(1 \leq j \leq 3)$ は三角形の頂点．

本節では，有限要素法で用いるさらに高次の区分多項式，すなわち，高次要素を紹介する．また，4 階微分方程式を解くための $C^1$ 級の区分多項式 ($C^1$ 級要素) も紹介する．

## 5.2　1 次元高次要素

$\mathbb{R}$ 上の $k$ 次多項式全体がなす集合を $P_k$ と書く：

$$P_k := \operatorname{span}\left\{x^i \mid 0 \leq i \leq k\right\}.$$

1 次元有界開区間 $\Omega = (a, b)$ を要素分割し，その一つの要素 $K = (x^1, x^2)$ に着目する．自然数 $k \geq 2$ に対して，$K$ の内部に異なる $k-1$ 個の節点を取ると，$\overline{K}$ 上の節点は端点も含めて，図 22 のように $k+1$ 個になる．$f \in C^0(\overline{K})$ が与えられた時，

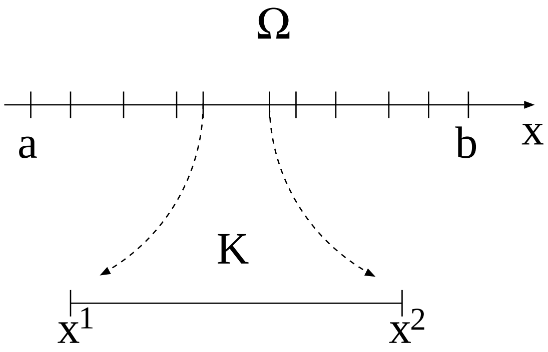


図 21: $\Omega = (a, b)$ の要素分割と要素 $K$.

$$v(x^i) = f(x^i) \quad (1 \leq i \leq k+1) \tag{85}$$

を満たす $k$ 次多項式 $v$ が一意的に定まる[17]．特に，各 $1 \leq i \leq k+1$ に対して，

$$\phi_i(x^j) = \delta_{ij} \quad (1 \leq \forall j \leq k+1) \tag{86}$$

---

[17] Vandermonde の行列式が零でないので．

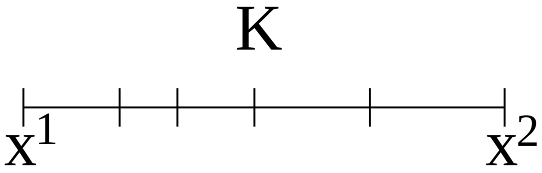


図 22: 要素 $K$ 上の節点（$k = 5$ の時）．

を満たす $\phi_i \in P_k$ が一意的に存在する．$\{\phi_i\}_{i=1}^{k+1}$ は $P_k$ の基底となり，(85) を満たす $v$ は

$$v(x) = \sum_{j=1}^{k+1} f(x^j)\phi_i(x) \tag{87}$$

で与えられる．

このような有限要素は $P_k$ 要素と呼ばれ，次のように定義される：

- $K$: 線分．
- $P_K = P_k$.
- $\Sigma = \left\{ v(x^i) \mid 1 \le i \le k+1 \right\}$.

**命題 45** 有界開区間 $\Omega = (a, b)$ を $N$ 個の要素に分割し，各要素の内部に異なる $k-1$ 個の節点を取ると，$\overline{\Omega}$ 上に $(N+1)+(k-1)N$ 個の節点が存在することになる．これらの節点を $\{x_i \,|\, 1 \le i \le (N+1)+(k-1)N\}$ とする．任意の $f \in C^0(\overline{\Omega})$ に対し，

$$v(x_i) = f(x_i) \quad (1 \le i \le (N+1)+(k-1)N)$$

を満たす $\Omega$ 上の**連続**な区分 $k$ 次多項式 $v$ が一意的に定まる．

**証明**．上述のように各要素上で $k$ 次多項式が一意的に定まる．隣り合う要素間での連続性はその二つの要素が共有する節点上で $v$ が同じ値を持つことから分かる． ■

### 5.2.1 $P_2$ 要素

要素 $K = (x^1, x^2)$ における長さ座標 $\lambda_1, \lambda_2$ を考える．ここで，$\lambda_i(x^j) = \delta_{ij}$ $(1 \le i, j \le 2)$ を満たすものとする．

$k = 2$ の時，$K$ を 2 等分し，その分割点を $x^3$ とする：$x^3 := (x^1 + x^2)/2$.

この時，2 次多項式 $\phi_i(x)$ $(1 \le i \le 3)$ で (86) を満たすものは，

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \lambda_1(x)\,(2\lambda_1(x) - 1)\,, \\
\phi_2(x) &= \lambda_2(x)\,(2\lambda_2(x) - 1)\,, \\
\phi_3(x) &= 4\lambda_1(x)\lambda_2(x)
\end{aligned}$$

で与えられる（図 23–25 を見よ）．

今，区間 $\Omega := (a, b)$ を $N$ 個の要素に分割し，各要素の中点を節点とし，そして，各節点に図 26 のように節点番号をつける．この時，偶数番目の節点が要素の中点となる．命題 45 より，各 $i = 1, 2, \ldots, 2N+1$ に対して，

$$\varphi_i(x^j) = \delta_{i,j} \quad (1 \le i, j \le 2N+1)$$

を満たす連続な区分 2 次多項式 $\varphi_i$ が一意的に存在する．関数 $\varphi_{2i-1}, \varphi_{2i}$ はそれぞれ図 27, 28 のようになる．

関数 $\varphi_i$ $(1 \le i \le 2N+1)$ が $P_2$ 要素を用いる有限要素法の基底関数となる．すなわち，有限要素解 $u_h$ は

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{2N+1} u_j \varphi_j(x), \qquad u_j \in \mathbb{R} \quad (1 \le j \le 2N+1)$$

で与えられる．

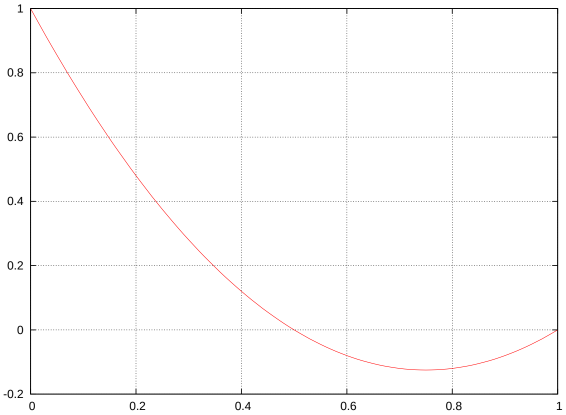


図 23: $K = (0,\,1)$ の時の関数 $\phi_1$.

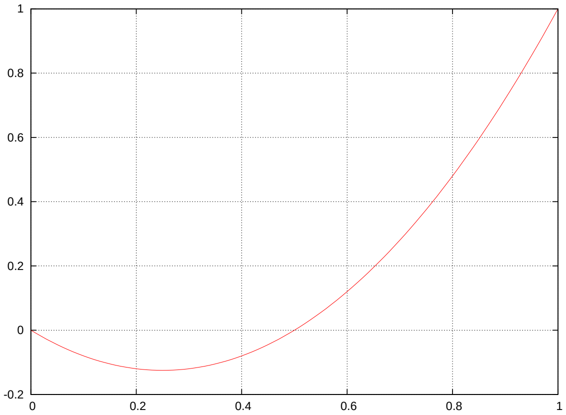


図 24: $K = (0,\,1)$ の時の関数 $\phi_2$.

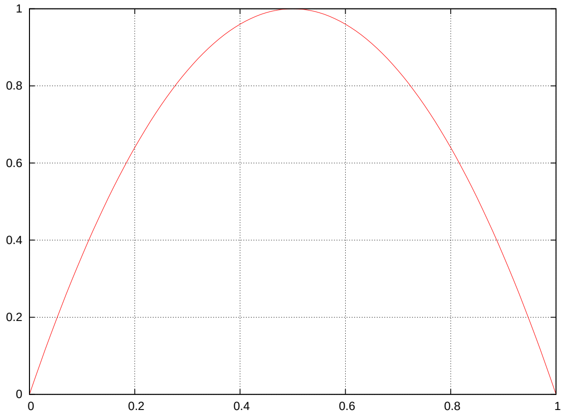


図 25: $K = (0,\,1)$ の時の関数 $\phi_3$.

### 5.2.2 $P_3$ 要素

$k = 3$ の時，$K$ を 2 等分し，その分割点を $x^3, x^4$ とする：

$$x^3 := \frac{1}{3}(2x^1 + x^2), \quad x^4 := \frac{1}{3}(x^1 + 2x^2).$$

この時，$P_3$ の基底関数 $\{\phi_i\}_{i=1}^4$ で (86) を満たすものは，

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \frac{1}{2}\lambda_1(x)\,(3\lambda_1(x) - 1)\,(3\lambda_1(x) - 2)\,, \\
\phi_2(x) &= \frac{1}{2}\lambda_2(x)\,(3\lambda_2(x) - 1)\,(3\lambda_2(x) - 2)\,, \\
\phi_3(x) &= \frac{9}{2}\lambda_1(x)\lambda_2(x)\,(3\lambda_1(x) - 1)\,, \\
\phi_4(x) &= \frac{9}{2}\lambda_1(x)\lambda_2(x)\,(3\lambda_2(x) - 1)
\end{aligned}$$

で与えられる．

## 5.3 高次三角形要素

2 次元有界領域 $\Omega$ を三角形要素分割し，その一つの三角形要素 $K$ に着目する．三角形要素 $K$ 上の $k$ 次多項式について考える．

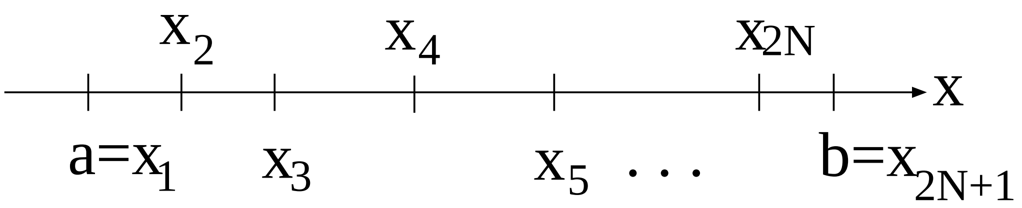


図 26: $P_2$ 要素を用いる際の区間 $\Omega = (a,\, b)$ の節点.

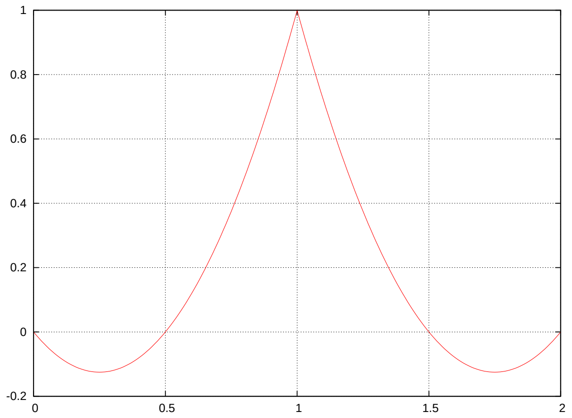


図 27: 関数 $\varphi_{2i-1}$.

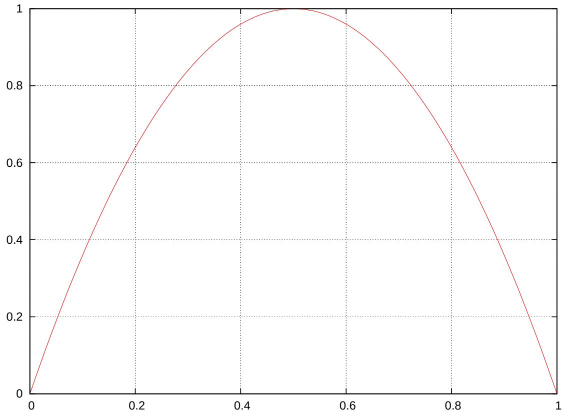


図 28: 関数 $\varphi_{2i}$.

$\mathbb{R}^2$ 上の $k$ 次多項式全体がなす集合 $P_k$ は,

$$P_k := \operatorname{span}\left\{x^i y^j \mid 0 \le i \le k,\ 0 \le j \le k,\ i+j \le k\right\}$$

で定義される. $\mathbb{R}^2$ 上の $k$ 次多項式をよりよく理解するためには, Pascal の三角形が役に立つ.

$$\begin{array}{lccccccccc}
k=0: & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & / & & \backslash & & & \\
k=1: & & & & x & & y & & & \\
 & & & / & & \backslash/ & & \backslash & & \\
k=2: & & & x^2 & & xy & & y^2 & & \\
 & & / & & \backslash/ & & \backslash/ & & \backslash & \\
k=3: & & x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3 & \\
 & / & & \backslash/ & & \backslash/ & & \backslash/ & & \backslash \\
k=4: & x^4 & & x^3y & & x^2y^2 & & xy^3 & & y^4
\end{array}$$

ここで, $\dim P_k = (k+1)(k+2)/2$ となることに注意する.

$k$ 次多項式を一意的に定める三角形要素 $\overline{K}$ 上の一つの節点配置を与える. 三角形 $K$ の頂点を $\boldsymbol{q}^1,\, \boldsymbol{q}^2,\, \boldsymbol{q}^3$ とし, 各 $\boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{B}_k := \left\{\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\, \beta_2,\, \beta_3) \in \mathbb{N}_0^3 \mid |\boldsymbol{\beta}| := \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = k\right\}$ に対し,

$$\text{(88)} \quad \boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\beta}} := \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{3} \beta_j \boldsymbol{q}^j.$$

ここで, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ である. さらに,

$$\sharp\mathfrak{B}_k = \frac{1}{2}(k+2)(k+1) = \dim P_k$$

となることに注意せよ. $k = 1,\, 2,\, 3$ に対する節点は図 29 のようになる.

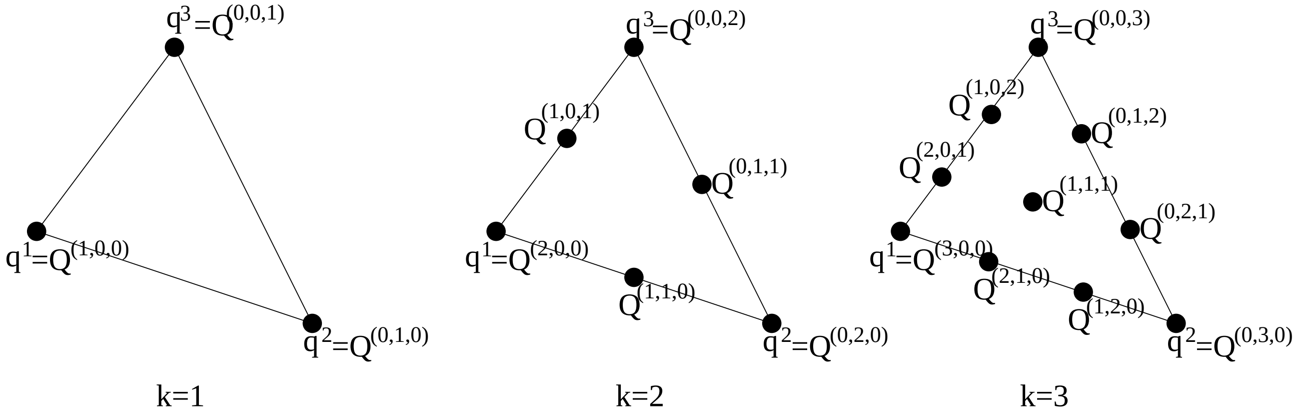


図 29: $k$ 次多項式に対する三角形要素上の節点配置（$k=1,2,3$）．

**注記 46** 三角形要素 $K$ に対する面積座標を $\{\lambda_j\}_{j=1}^3$ とする時，各 $k\in\mathbb{N}$ に対して，

$$(89)\quad k\lambda_j(\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\beta}}) = \beta_j \qquad \forall\boldsymbol{\beta}\in\mathfrak{B}_k,\quad 1\le\forall j\le 3$$

が成立する．

**命題 47** 三角形 $K$ の頂点を $\boldsymbol{q}^1$, $\boldsymbol{q}^2$, $\boldsymbol{q}^3$ とし，(88) によって定義される $\overline{K}$ 上の節点 $\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\beta}}$ $(\boldsymbol{\beta}\in\mathfrak{B}_k)$ を考える．任意の $f\in C^0(\overline{K})$ に対して，

$$(90)\quad v(\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\beta}}) = f(\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\beta}}) \quad \forall\boldsymbol{\beta}\in\mathfrak{B}_k$$

を満たす $v\in P_k$ が一意的に存在する．

**証明．**（[13] による）

*Step* 1. まず，図 30 のような三角形 $\widehat{K}$ [18]で命題を示す．三角形 $\widehat{K}$ の (88) によって定義される節点配置は図 31 のようになることに注意する．これらの節点を $\widehat{\boldsymbol{Q}}^{\boldsymbol{\beta}}$ と書くことにする．$k$ に関する数学的帰納法によって証明しよう．$k=1$ の時は明らかであるので，$k-1$ $(k\ge 2)$ を仮定して，$k$ の時を示す．$k$ の時，$\hat{y}=0$ 上の節点は，$\beta_3=0$ を満たす $k+1$ 個の節点 $\widehat{\boldsymbol{Q}}^{\boldsymbol{\beta}}$ である．この時，

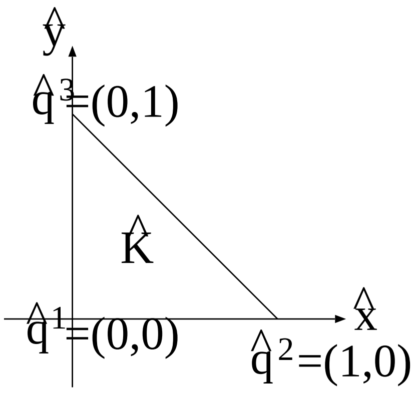


図 30: 三角形 $\widehat{K}$.

$$v_0(\hat{x}^{\boldsymbol{\beta}}) = f(\widehat{\boldsymbol{Q}}^{\boldsymbol{\beta}}) \quad \forall\boldsymbol{\beta}\in\mathfrak{B}_k \text{ satisfying } \beta_3=0$$

---

[18] 三角形 $\widehat{K}$ は参照三角形 (要素) と呼ばれることがある．

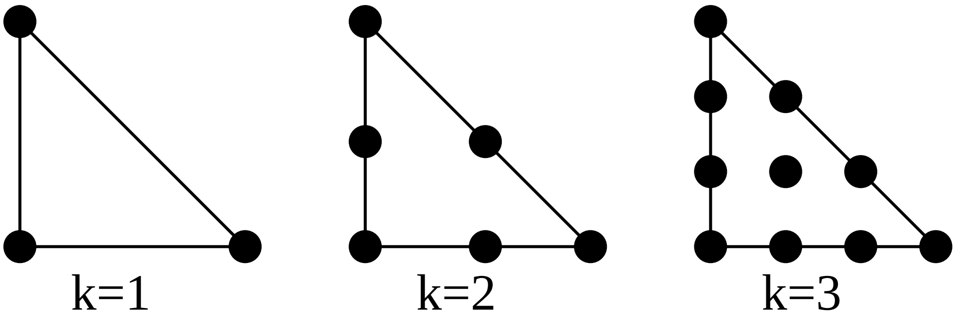


図 31: 三角形 $\widehat{K}$ の節点配置.

を満たす $\hat{x}$ の $k$ 次多項式 $v_0(\hat{x})$ が一意的に定まる．ここで，$\hat{x}^{\boldsymbol{\beta}}$ は $\widehat{\boldsymbol{Q}}^{\boldsymbol{\beta}}$ の $x$ 座標である．残りの節点，すなわち $\beta_3 \neq 0$ を満たす $\widehat{\boldsymbol{Q}}^{\boldsymbol{\beta}}$ は，$k(k+1)/2$ 個であり，帰納法の仮定より，

$$w(\widehat{\boldsymbol{Q}}^{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{1}{\hat{y}^{\boldsymbol{\beta}}}\left[f(\widehat{\boldsymbol{Q}}^{\boldsymbol{\beta}}) - v_0(\hat{x}^{\boldsymbol{\beta}})\right] \quad \forall \boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{B}_k \text{ satisfying } \beta_3 \neq 0$$

を満たす $k-1$ 次多項式 $w(\hat{x}, \hat{y})$ が一意的に定まる．ここで，$\hat{y}^{\boldsymbol{\beta}}$ は $\widehat{\boldsymbol{Q}}^{\boldsymbol{\beta}}$ の $y$ 座標である．この時，$v(\hat{x}, \hat{y}) := v_0(\hat{x}) + \hat{y}w(\hat{x}, \hat{y})$ は (90) を満たす $k$ 次多項式となる．

*Step* 2. 一般の三角形 $K$ について考える．三角形 $\widehat{K}$ から三角形 $K$ への affine 写像 $\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{F}(\widehat{\boldsymbol{q}^j}) = \boldsymbol{q}^j$ $(1 \leq j \leq 3)$ を満たすように一意的に定めることができる[19]．この時，写像 $\boldsymbol{F}$ は $\overline{\widehat{K}}$ から $\overline{K}$ への全単射となる．さらに，次の二つのこと

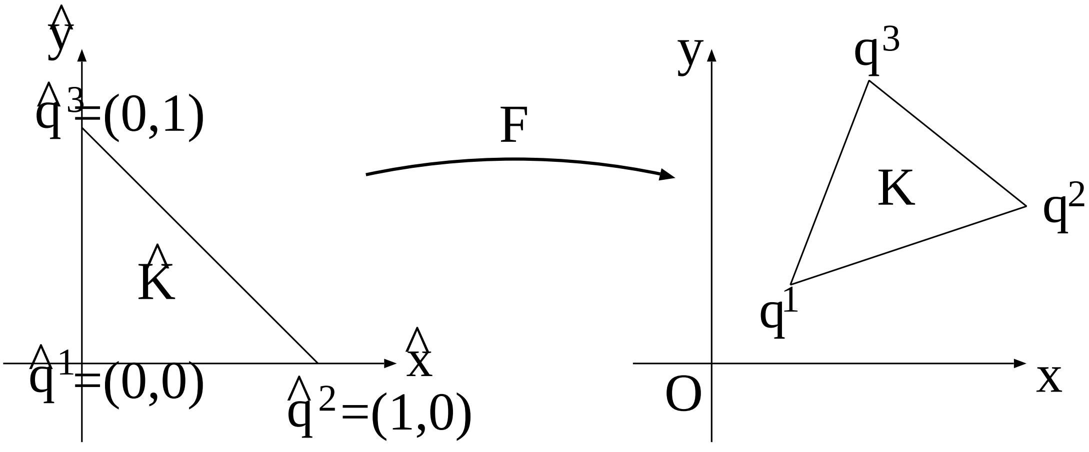


図 32: 三角形 $\widehat{K}$ から三角形 $K$ への affine 写像.

に注意する：

i) $\widehat{K}$ の各節点を $K$ の対応する節点に写す：

(91) $\boldsymbol{F}(\widehat{\boldsymbol{Q}}^{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\beta}} \qquad \forall \boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{B}_k$

が成立する．

ii) $k$ 次多項式は affine 変換によって普遍である：

(92) $v(x, y) \in P_k \Longrightarrow \hat{v}(\hat{x}, \hat{y}) := v \circ \boldsymbol{F}(\hat{x}, \hat{y}) \in P_k$

---

[19] $\boldsymbol{q}^j = (x^j, y^j)$ $(1 \leq j \leq 3)$ とした時，$\boldsymbol{F}(\widehat{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} x^2 - x^1 & x^3 - x^1 \\ y^2 - y^1 & y^3 - y^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{bmatrix}$ で与えられる．ここで，$\widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$．

が成立する．

任意の $f \in C^0(\overline{K})$ に対して，Step 1 より，

$$(93)\quad \hat{v}(\widehat{\boldsymbol{Q}}^{\boldsymbol{\beta}}) = f \circ \boldsymbol{F}(\widehat{\boldsymbol{Q}}^{\boldsymbol{\beta}}) \quad \forall \boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{B}_k$$

を満たす $\hat{v} \in P_k$ が唯一つ存在する．

$$(94)\quad v(x, y) := \hat{v} \circ \boldsymbol{F}^{-1}(x, y)$$

とする時，(92) より，$v \in P_k$ であり，また，(91) と (93) より，(90) を満たすことが分かる．$v$ の一意性は $\hat{v}$ の一意性から従う． ■

以上より，(2 次元)$P_k$ 要素を次のように定義する．

- $K$: 三角形．
- $P_K = P_k$.
- $\Sigma = \left\{ v(\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\beta}}) \mid \boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{B}_k \right\}$.

有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ の三角形分割を $\{K_m\}_{m=1}^M$ とする．各三角形要素 $K_m$ 上で，(88) によって定義される節点を考える．この時，$\overline{K_m} \cap \overline{K_{m'}} \neq \emptyset$ なる二つの要素に対し，各要素で定めた節点は $\overline{K_m} \cap \overline{K_{m'}}$ 上で一致することに注意せよ（図 33 参照）．これらの一致する節点を同一の節点と考え，$\Omega$ 全体での節点を考える（図 34 参照）．それらを $\{\boldsymbol{q}_n\}_{n=1}^N$ とする．

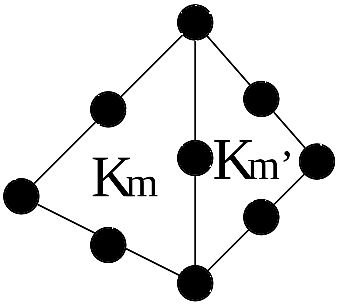


図 33: 隣合う三角形要素 $K_m$ と $K_{m'}$ の節点配置（$k = 2$ の時）．

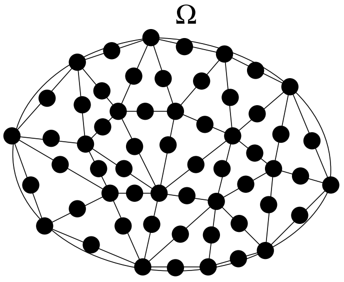


図 34: 領域 $\Omega$ の三角形分割と $k = 2$ の時の節点配置．

**命題 48** 有界多角形領域 $\Omega$ を三角形分割し，上述のようにできる節点の集合を $\{\boldsymbol{q}_n\}_{n=1}^N$ とする．この時，任意の $f \in C^0(\overline{\Omega})$ に対し，

$$(95)\quad v(\boldsymbol{q}_i) = f(\boldsymbol{q}_i) \quad (1 \leq i \leq N)$$

を満たす $\overline{\Omega}$ 上の連続区分 $k$ 次多項式 $v$ が一意的に定まる．

**証明．** 各要素 $K_m$ 上で (95) を満たす $v_m \in P_k$ が一意的に定まることは命題 47 から分る．これによって，$\Omega$ 上の区分 $k$ 次多項式 $v$ が一意的に定まる．

次に $v$ の連続性について示す．まず，隣り合う要素間での連続性について考える．隣り合う要素を $K_m$, $K_{m'}$ とし，$e := \partial K_m \cap \partial K_{m'}$ とすると，$v_m$ と $v_{m'}$ は $e$ 上で 1 次元の $k$ 次多項式となる．一方，上述のように $K_m$ と $K_{m'}$ の $e$ 上での節点は一致するので（図 33 参照），$e$ 上で $v_m = v_{m'}$ となる．よって，$v \in C^0(\overline{K_m} \cup \overline{K_{m'}})$ となる．さらに，このことから，三角形要素の頂点となる節点における連続性は簡単に示すことができる． ■

命題 48 より，各 $1 \le i \le N$ に対し，連続な区分 $k$ 次多項式 $\varphi_i$ で

$$(96) \quad \varphi_i(\boldsymbol{q}_j) = \delta_{ij} \quad (1 \le \forall j \le N)$$

を満たすものが一意的に存在することが分かる．この時，$\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ が $P_k$ 要素を用いる有限要素法の基底関数となる．

### 5.3.1 $P_2$ 要素

三角形 $K$ の面積座標を $\lambda_j$ $(j = 1, 2, 3)$ とする．$k = 2$ の時の節点を図 35 のように名前を付け直す．

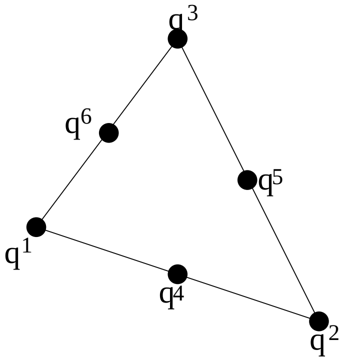


図 35: 2 次多項式に対する節点．

$$\phi_j := \lambda_j(2\lambda_j - 1) \quad (1 \le j \le 3),$$

$$\phi_4 := 4\lambda_1\lambda_2, \quad \phi_5 := 4\lambda_2\lambda_3, \quad \phi_6 := 4\lambda_1\lambda_3$$

とすると，

$$\phi_i(\boldsymbol{q}^j) = \delta_{ij} \quad (1 \le i, j \le 6)$$

が成立し，$\{\phi_j\}_{1 \le j \le 6}$ は $P_2$ の基底関数になる．これらの基底関数には図 36, 37 に示すように二つのタイプがある．

(96) を満たす $P_2$ 要素を用いる有限要素法の基底関数には図 38, 39 に示すように二つのタイプがある．

## 5.4 長方形要素

考えている領域 $\Omega$ が図 40 のような時には，領域 $\Omega$ を長方形要素に分割することもできる．長方形要素上では，双 $k$ 次多項式：

$$Q_k := \operatorname{span}\left\{x^j y^j \mid 0 \le i \le k,\ 0 \le j \le k\right\}$$

を使用する．長方形要素上での節点配置は図 41 のようになる．$\dim Q_k = (k+1)^2$ である．

$Q_1$ 要素の定義は，次のようになる：

- $K$: 四角形．

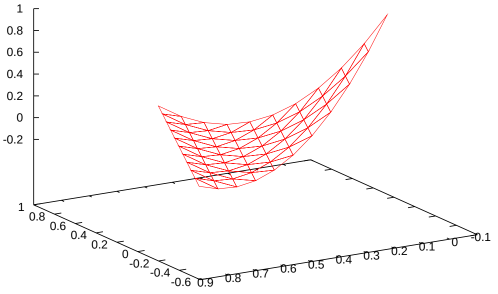


図 36: 関数 $\phi_i$ $(1 \leq i \leq 3)$.

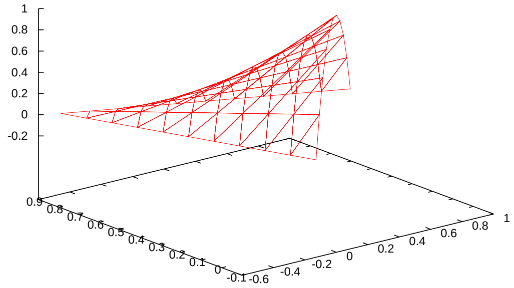


図 37: 関数 $\phi_i$ $(4 \leq i \leq 6)$.

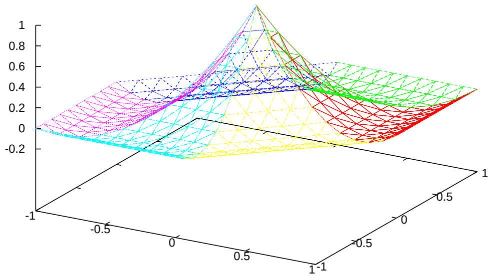


図 38: 三角形の頂点節点に対応する基底関数 $\varphi_i$.

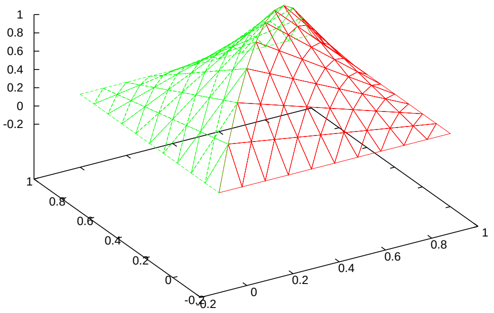


図 39: 三角形の辺の中点節点に対応する基底関数 $\varphi_i$.

- $P_K = \mathrm{span}\{xy,\, x,\, y,\, 1\}$.
- $\Sigma = \left\{v(\boldsymbol{q}^j) \mid 1 \leq j \leq 4\right\}$. ここで，$v \in P_K$ であり，$\boldsymbol{q}^j$ $(1 \leq j \leq 4)$ は四角形の頂点である（図 41 の左図参照）.

四角形要素 $K = (x^1,\, x^2) \times (y^1,\, y^2)$ の時，区間 $(x^1,\, x^2)$ の長さ座標を $\lambda_j(x;\, x^1,\, x^2)$ $(j = 1,\, 2)$ と書くこととし，

$$\begin{aligned}
\phi_1(x,\, y) &:= \lambda_1(x;\, x^1,\, x^2)\lambda_1(y;\, y^1,\, y^2),\\
\phi_2(x,\, y) &:= \lambda_2(x;\, x^1,\, x^2)\lambda_1(y;\, y^1,\, y^2),\\
\phi_3(x,\, y) &:= \lambda_2(x;\, x^1,\, x^2)\lambda_2(y;\, y^1,\, y^2),\\
\phi_4(x,\, y) &:= \lambda_1(x;\, x^1,\, x^2)\lambda_2(y;\, y^1,\, y^2),
\end{aligned}$$

と定義すると，$\{\phi_i\}_{i=1}^4$ は $\phi_i(\boldsymbol{q}^j) = \delta_{ij}$ $(1 \leq i,\, j \leq 4)$ を満たす $Q_1$ の基底関数となることが分かる．ここで，$\boldsymbol{q}^j$ $(1 \leq j \leq 4)$ は図 41 の左図の節点である．

## 5.5 3 次元有限要素

3 次元有限要素の形状は，四面体，直方体，三角柱が考えられる（図 42 参照）．四面体要素や直方体要素では，それぞれ $P_k$ や $Q_k$ を考えることができる．

領域 $\Omega$ が柱状領域の場合は，底面の三角形分割を利用して，三角柱要素を用いることができる．三角柱要素を用いる有限要素の一例を挙げる：

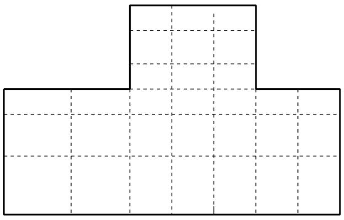


図 40: 長方形分割ができる領域.

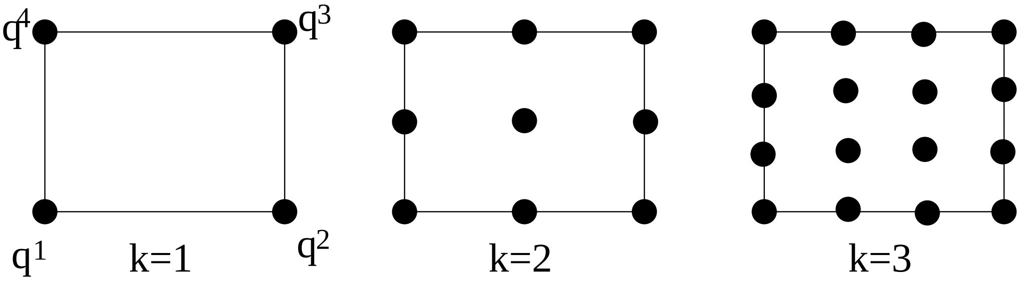


図 41: 長方形要素上での節点配置.

- $K$: 三角柱.
- $P_K = \mathrm{span}\{1,\, x,\, y,\, z,\, xz,\, yz\}$.
- $\Sigma = \{6$ つの頂点での節点値 $\}$.

## 5.6　4 階微分方程式に対する有限要素

4 階微分方程式 (6), (43) の弱形式 (7), (44) には，2 階微分が含まれているので，有限要素解は $C^1$ 級に属する必要がある．そこで，以下で $C^1$ 級となる区分多項式について考えていく．

### 5.6.1　1 次元 Hermite 要素

区分 3 次多項式によって $C^1$ 級関数を構成することができる．すなわち，次の有限要素を考えればよい．

- $K$: 線分.
- $P_K = P_3$.
- $\Sigma = \left\{ v(x^j),\ v'(x^j) \mid 1 \le j \le 2 \right\}$.

この要素は (1 次元)Hermite 要素と呼ばれる[20].

$\phi_j \in P_3$ $(1 \le j \le 4)$ で，

$$\begin{cases} \phi_{2i-1}(x^j) = \delta_{i,j} \quad (1 \le i,\, j \le 2), & \phi_{2i}(x^j) = 0 \quad (1 \le i,\, j \le 2), \\ \phi'_{2i-1}(x^j) = 0 \quad (1 \le i,\, j \le 2), & \phi'_{2i}(x^j) = \delta_{i,j} \quad (1 \le i,\, j \le 2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \phi_1(x^1) = 1,\ \phi_1(x^2) = \phi'_1(x^1) = \phi'_1(x^2) = 0, \\ \phi_2(x^1) = \phi_2(x^2) = 0,\ \phi'_2(x^1) = 1,\, \phi'_2(x^2) = 0, \\ \phi_3(x^1) = 0,\ \phi_3(x^2) = 1,\ \phi'_3(x^1) = \phi'_3(x^2) = 0, \\ \phi_4(x^1) = \phi_4(x^2) = \phi'_4(x^1) = 0,\, \phi'_4(x^2) = 1 \end{cases}$$

---

[20] Hermite 要素の自由度 $\Sigma$ によって，3 次多項式が一意的に定まることは，合流型 Vandermonde 行列の行列式が零でないことから分かる [16]. 定まる 3 次多項式は Hermite 補間関数と呼ばれる.

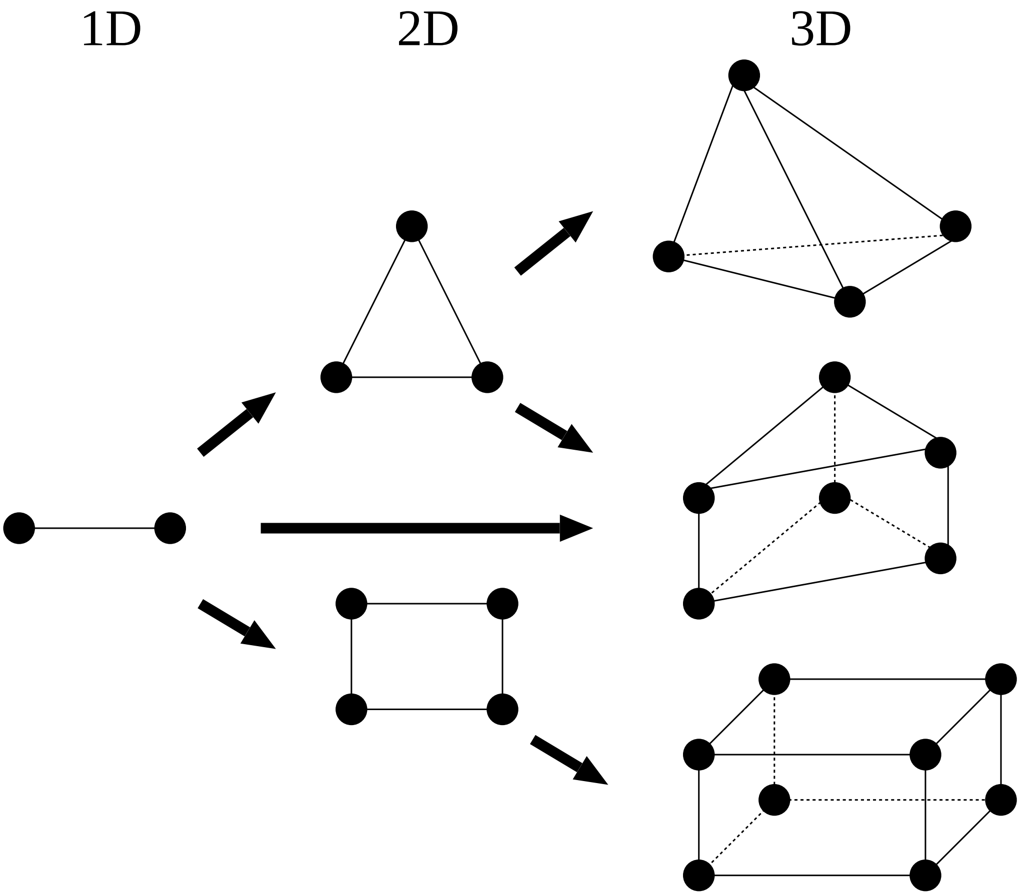


図 42: 1 次元有限要素から 3 次元有限要素までの形状.

を満たす関数は，要素 $K = (x^1, x^2)$ 上の長さ座標を $\lambda_j$ $(j = 1, 2)$ とすれば，

$$\phi_1 = \lambda_1^2(\lambda_1 + 3\lambda_2), \quad \phi_2 = (x^2 - x^1)\lambda_1^2\lambda_2,$$

$$\phi_3 = \lambda_2^2(\lambda_2 + 3\lambda_1), \quad \phi_4 = -(x^2 - x^1)\lambda_1\lambda_2^2$$

で与えられる（図 43–46 を見よ）．ここで，奇数添え字の $\phi_j$ は節点における値を，偶数添え字の $\phi_j$ は節点における微分値を，それぞれ受け持つ関数である．

今，区間 $\Omega := (0, 1)$ を $N$ 個の要素に分割し，各節点に図 47 のように節点番号をつける．各 $i = 1, 2, \dots, N + 1$ に対して，

$$\varphi_{2i-1}(x^j) = \delta_{i,j} \quad (1 \le i, j \le N + 1), \qquad \varphi_{2i}(x^j) = 0 \quad (1 \le i, j \le N + 1),$$

$$\varphi'_{2i-1}(x^j) = 0 \quad (1 \le i, j \le N + 1), \qquad \varphi'_{2i}(x^j) = \delta_{i,j} \quad (1 \le i, j \le N + 1)$$

を満たす区分 3 次多項式 $\varphi_{2i-1}, \varphi_{2i}$ が一意的に存在する．関数 $\varphi_{2i-1}, \varphi_{2i}$ はそれぞれ図 48, 49 のようになる．

関数 $\varphi_{2i-1}, \varphi_{2i}$ $(1 \le i \le N + 1)$ を基底関数として用い，4 階常微分方程式の境界値問題 (6):

$$\begin{cases} \dfrac{d^4u}{dx^4}(x) = f(x) \quad \text{in} \quad \Omega := (0, 1), \\ u(0) = u(1) = \dfrac{du}{dx}(0) = \dfrac{du}{dx}(1) = 0. \end{cases}$$

の離散近似問題を定式化することを考えよう．弱形式は前述 (7) のように書けたが，ここでは，Sobolev 空間 $H_0^2(\Omega)$ を使って次のように書く：

$$(97) \quad \begin{cases} \text{Find } u \in H_0^2(\Omega) \text{ such that} \\ a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^2(\Omega). \end{cases}$$

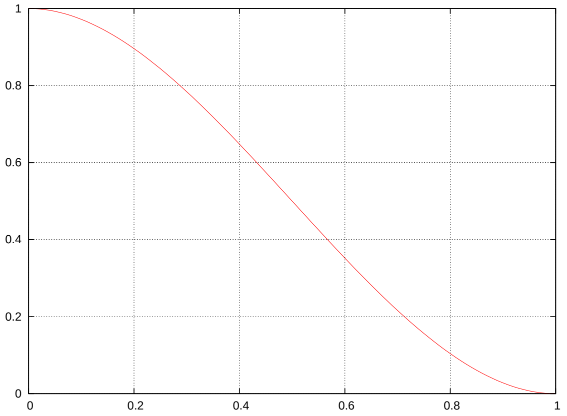


図 43: 関数 $\phi_1$. $K \equiv (x^1,\, x^2) = (0,\, 1)$.

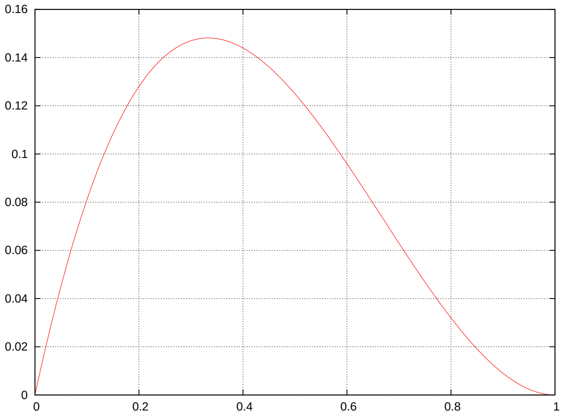


図 44: 関数 $\phi_2$. $K \equiv (x^1,\, x^2) = (0,\, 1)$.

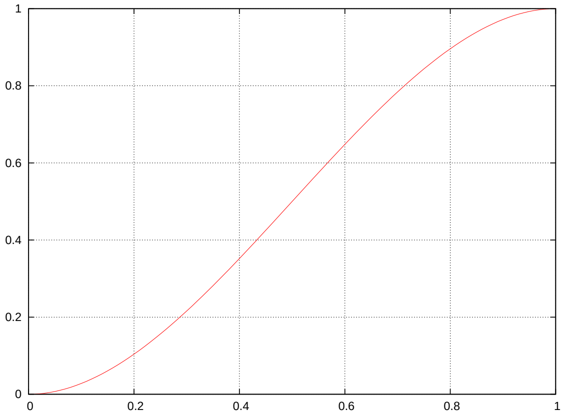


図 45: 関数 $\phi_3$. $K \equiv (x^1,\, x^2) = (0,\, 1)$.

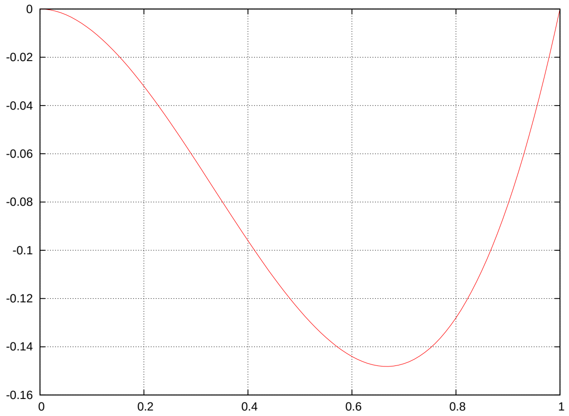


図 46: 関数 $\phi_4$. $K \equiv (x^1,\, x^2) = (0,\, 1)$.

ここで，

$$\begin{aligned}
a(u,\, v) \quad &:= \quad \int_\Omega u''(x)v''(x)\,dx, \\
(f,\, g) \quad &:= \quad \int_\Omega f(x)g(x)\,dx, \\
H^2(\Omega) \quad &:= \quad \left\{v \in L^2(\Omega) \mid v',\, v'' \in L^2(\Omega)\right\}, \\
H_0^2(\Omega) \quad &:= \quad \left\{v \in H^2(\Omega) \mid v(0) = v(1) = v'(0) = v'(1) = 0\right\}.
\end{aligned}$$

有限要素空間：

$$V_h := \mathrm{span}\,\{\varphi_j \mid 3 \le j \le 2N\}$$

を導入すると，(97) の離散近似問題は，次のように定式化できる：

$$(98) \quad \begin{cases} \text{Find } u_h \in V_h \text{ such that} \\ a(u_h,\, v_h) = (f,\, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases}$$

ここで，$v_h \in V_h$ ならば，

$$v_h(0) = v_h(1) = v_h'(0) = v_h'(1) = 0$$

となることに注意せよ．また，有限要素解 $u_h$ は

$$u_h(x) = \sum_{j=3}^{2N} u_j\varphi_j(x)$$

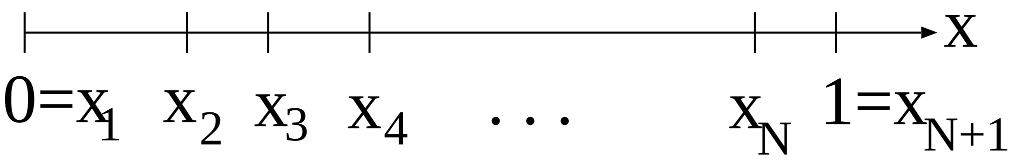


図 47: 区間 $\Omega = (0, 1)$ の分割.

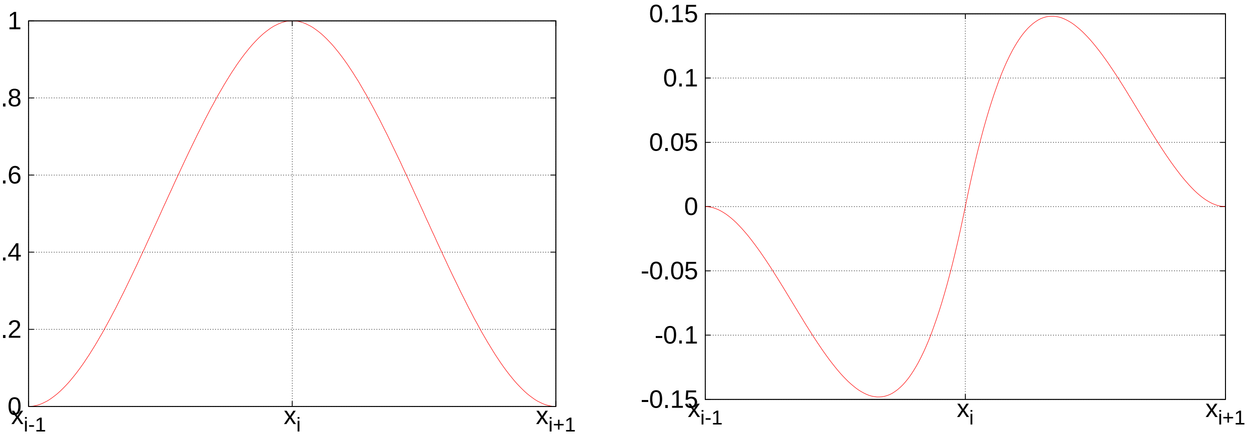


図 48: 関数 $\varphi_{2i-1}$.

図 49: 関数 $\varphi_{2i}$.

と表されるが，$u_{2i-1}$ と $u_{2i}$ はそれぞれ，厳密解 $u$ の $x = x_i$ での値 $u(x_i)$ と微分値 $u'(x_i)$ の近似値となることにも注意せよ.

### 5.6.2 Argyris 要素

領域の三角形分割を考えた時，区分 5 次多項式（自由度 $\dim P_5 = 21$）を考え，各三角形要素において各頂点での

$$v,\ \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

の値 $(6 \times 3 = 18$ 自由度$)$ と各辺の中点での

$$\frac{\partial v}{\partial n}$$

の値 $(1 \times 3 = 3$ 自由度$)$ を定めることによって，5 次多項式を一意的に定めることができる．これは Argyris（アージリス）要素と呼ばれる．Argyris 要素は次のように定義される．

- $K$: 三角形.
- $P_K = P_5$.
- $\Sigma = \left\{ v(\boldsymbol{q}^j),\ \frac{\partial v}{\partial x}(\boldsymbol{q}^j),\ \frac{\partial v}{\partial y}(\boldsymbol{q}^j),\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\boldsymbol{q}^j),\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(\boldsymbol{q}^j),\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{q}^j)\ (1 \leq j \leq 3);\ \frac{\partial v}{\partial n}(\boldsymbol{q}^j)\ (4 \leq j \leq 6) \right\}$. ここで，$\boldsymbol{q}^j$ $(1 \leq j \leq 6)$ は図 35 によって定義される節点である.

**演習問題 49** Argyris 要素の自由度 $\Sigma$ によって，5 次多項式が一意的に定まることを示せ．また，Argyris 要素は $\overline{\Omega}$ 上で $C^1$ 級になることを示せ.

## 5.7 Lagrange 型有限要素と Hermite 型有限要素

$\Sigma$ の中に関数の値だけを含むものを Lagrange 型有限要素と呼び，第 5.6 節で述べた要素のように，$\Sigma$ の中に関数の導関数の値を含むものを Hermite 型有限要素と呼ぶ.

## 第 II 部

# 有限要素法の数理

## 6　超関数と Sobolev 空間

### 6.1　Schwartz の超関数（distribution）

Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ の開集合 $\Omega$ を考える．関数 $\varphi\colon\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し，$\varphi$ の台 (support) を

$$\operatorname{supp}\varphi := \overline{\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega}$$

で定義する．ここで，$\overline{\{\cdots\}}^{\Omega}$ は $\Omega$ 上の $\mathbb{R}^d$ の通常の位相に関する相対位相での閉包である．関数空間 $\mathcal{D}(\Omega)$ を導入する．

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{\varphi \in C^{\infty}(\Omega) \mid \operatorname{supp}\varphi \text{ が } \Omega \text{ のコンパクト集合になる}\}.$$

この時，$\mathcal{D}(\Omega)$ は線形空間となる．$\mathcal{D}(\Omega)$ は $C_0^{\infty}(\Omega)$ 書かれることもある．

**定義 50 ($\mathcal{D}(\Omega)$ における点列の収束)** $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ $(n \in \mathbb{N})$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して，

$$\varphi_n \longrightarrow \varphi \quad \text{in} \quad \mathcal{D}(\Omega) \quad (n \longrightarrow \infty)$$

とは，以下の 2 つが成り立つことである：

1. $\Omega$ のあるコンパクト集合 $K$ が存在して，

   $$\operatorname{supp}\varphi_n \subset K \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad \operatorname{supp}\varphi \subset K.$$

2. $\varphi_n$ の各階数の導関数は $\varphi$ の対応する階数の導関数に $K$ 上で一様収束する．すなわち，

   $$\sup_{x \in K} |D^{\alpha}\varphi_n(x) - D^{\alpha}\varphi(x)| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d.$$

   ここで，$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$,

   $$D^{\alpha} := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

   $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$.

空間 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上の連続線形汎関数を超関数と呼ぶ．正確には，次のように定義する：

**定義 51 (超関数)** 写像 $T\colon\ \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ $(\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle \in \mathbb{R})$ が以下の 2 つを満たすとき，$T$ は $\Omega$ 上の超関数であると言う．

1. $T$ は線形写像．

2. $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ $(n \in \mathbb{N})$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して，

   $$\varphi_n \longrightarrow \varphi \quad \text{in} \quad \mathcal{D}(\Omega)$$

   が成立する時，

   $$\langle T, \varphi_n\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \quad (n \longrightarrow \infty).$$

   この性質は超関数の連続性と呼ばれる．

開集合 $\Omega$ 上の超関数全体の集合は線形空間をなす．それを $\mathcal{D}'(\Omega)$ と書く．

**例 52 (局所可積分関数)** $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \{f\colon\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \text{可測関数} \mid \Omega\text{の任意のコンパクト集合上で可積分}\}$ に対し，

$$\langle T_f,\, \varphi\rangle := \int_\Omega f\varphi\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

とすると，$T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ となる．

実際，任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して，$\int_\Omega f\varphi\, dx$ は有限であるので，$T_f$ は $\mathcal{D}(\Omega)$ から $\mathbb{R}$ への写像として，well-defined である．さらに，$T_f$ の線形性は明らかであるので，定義 51 の 2（連続性）が満たされることを示せば良い．

今，$\varphi_n \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ $(n \longrightarrow \infty)$ とする．この時，$\Omega$ のあるコンパクト集合 $K$ が存在して，

$$\operatorname{supp}\varphi_n \subset K \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \operatorname{supp}\varphi \subset K$$

が成り立つので，次が成り立つ：

$$\begin{aligned}|\langle T_f,\, \varphi_n - \varphi\rangle| &= \left|\int_\Omega f(\varphi_n - \varphi)\, dx\right| \\ &\le \int_K |f|\,|\varphi_n - \varphi|\ dx \\ &\le \sup_{x\in K}|\varphi_n - \varphi| \int_K |f|\ dx \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).\end{aligned}$$

**例 53 ($\delta$ 関数)** $0 \in \Omega$ とする．

$$\langle \delta,\, \varphi\rangle := \varphi(0)$$

と定義する．$\delta \in \mathcal{D}'(\Omega)$ となる．

実際，任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して，$\delta$ 関数は well-defined である．さらに，$\delta$ 関数の線形性は明らかであるので，$\delta$ 関数の連続性を示せば良い．

今，$\varphi_n \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ $(n \longrightarrow \infty)$ とすると，$\varphi_n(0) \longrightarrow \varphi(0)$ in $\mathbb{R}$ $(n \longrightarrow \infty)$ は明らかである．

### 6.1.1 正則超関数と特異超関数

超関数 $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ が，ある $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ によって，

$$(99)\quad \langle T,\, \varphi\rangle = \int_\Omega f\varphi\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

と表現される時，$T$ を**正則超関数**と呼び，その他の超関数を**特異超関数**と呼ぶ．

正則な超関数 $T$ に対して，(99) を満たす $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ は一意的に定まる．これは，下の定理 54(変分法の基本補題) から従う．これにより，$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ と正則超関数の間には 1 : 1 対応がつくことが分かる．

**定理 54 (変分法の基本補題)** 開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ とする．$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ に対して，

$$\int_\Omega f\varphi\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

が成り立つ時，$f = 0$ (a.e.) となる．

**証明．** 黒田 [22, 定理 6.5] を見よ． ■

**命題 55** $\delta$ 関数は特異超関数である．

**証明．** ある $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ によって，

$$(100)\quad \langle \delta,\, \varphi\rangle = \int_\Omega f\varphi\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

と表現されると仮定する．$\Omega_0 := \Omega \setminus \{0\}$ とした時，任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_0)$ $(\subset \mathcal{D}(\Omega))$ に対して，

$$0 = \int_\Omega f\varphi\, dx = \int_{\Omega_0} f\varphi\, dx$$

が成り立つ．$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_0)$ でもあるから，定理 54 により，$f = 0$ a.e. in $\Omega_0$. $\{0\}$ は零集合なので，$f = 0$ a.e. in $\Omega$ となる．故に，例えば，$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ で，$\varphi(0) = 1$ なるものに対しては，

$$\langle \delta, \varphi \rangle = 1, \quad \int_\Omega f\varphi\, dx = 0$$

となる．これは，仮定 (100) に矛盾する．したがって，$\delta$ 関数は特異超関数であることが分かる． ■

### 6.1.2 超関数の微分

$f \in C^1(\Omega)$ $(\subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega))$ なる関数を考える．この時，Green の公式から

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi\, dx = -\int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (1 \leq j \leq d)$$

が成立する．これを利用して，超関数 $T \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対する $x_j$ 方向への偏導関数 $D_jT$ を

$$(101)\ \langle D_jT, \varphi \rangle := -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

で定義する[21]．すなわち，$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して，$\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle$ を対応させせる写像を $T$ の導関数 $D_jT$ と定義する．ここで，導関数 $D_jT$ が超関数になっているかを調べる必要がある．線形性は明らかなので，連続性について調べる．

今，$\varphi_n \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ $(n \longrightarrow \infty)$ とする．この時，

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j} \longrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \quad \text{in} \quad \mathcal{D}(\Omega) \quad (n \longrightarrow \infty)$$

となるので，

$$\langle D_jT, \varphi_n \rangle \equiv -\left\langle T, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j} \right\rangle \longrightarrow -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle \equiv \langle D_jT, \varphi \rangle \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \quad (n \longrightarrow \infty)$$

となることから，連続性が成り立つことが分る．

**定義 56 (超関数の微分)** 超関数 $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ に対して，その偏導関数 $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ を

$$(102)\ \langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \left\langle T, \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x^{\alpha_1} \cdots \partial x^{\alpha_d}} \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

で定義する．ここで，$\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ $(\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\})$, $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ である．

**註記 57** 超関数は無限階 (超関数) 微分可能である．

**註記 58** 超関数の微分は通常の微分の一般化になっている．

**例 59 (Heaviside 関数の微分)** $\Omega := \mathbb{R}$ とし，$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ を

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x < 0, \\ 1 & \text{if} \quad x > 0 \end{cases}$$

---

[21] 第 6.1.2 節では，超関数微分の記号と通常の微分の記号を区別することとする．

で定義する．関数 $f$ は Heaviside 関数と呼ばれる．関数 $f$ の超関数の意味での 1 階導関数 $DT_f$ を求める．任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対して，

$$\begin{aligned}
\langle DT_f,\, \varphi\rangle &\equiv -\left\langle T_f,\, \frac{d\varphi}{dx}\right\rangle \\
&\equiv -\int_{\mathbb{R}} f\frac{d\varphi}{dx}\,dx \\
&= -\int_0^{\infty} \frac{d\varphi}{dx}\,dx \\
&= \varphi(0) \quad (\operatorname{supp}\varphi\ \text{が有界であることと部分積分の公式を用いた.}) \\
&\equiv \langle \delta,\, \varphi\rangle .
\end{aligned}$$

これより，

$$DT_f = \delta$$

となる．

以後，$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ によって定義される超関数 $T_f$ と $f$ とを同一視し，超関数 $T_f$ をそのまま $f$ と書くことにする．例えば，$\langle T_f,\, \varphi\rangle$ を $\langle f,\, \varphi\rangle$ と書いたり，$DT_f$ を $Df$ と書いたりする．

**例 60 ($\delta$ 関数の微分)** $\Omega := \mathbb{R}$ とする．任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して，

$$\langle D\delta,\, \varphi\rangle \equiv -\langle \delta,\, \varphi'\rangle = -\varphi'(0).$$

さらに，各 $m \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\langle D^m\delta,\, \varphi\rangle = (-1)^m\varphi^{(m)}(0)$$

となることが分かる．

**例 61 (区分的に滑らかな関数の微分)** $\Omega := \mathbb{R}$ とし，$\Omega^+ := (0,\, \infty)$, $\Omega^- := (-\infty,\, 0)$ とする．$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ は，$f \in C^{\infty}(\Omega^{\pm})$ で，$\Omega^{\pm}$ での $m$ 階導関数 $f^{(m)}$ ($\forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) は，原点における右極限と左極限が存在するものとする．すなわち，

$$f^{(m)}(\pm 0) := \lim_{x \longrightarrow \pm 0} f^{(m)}(x)$$

が存在するものとする．関数 $f$ の 1 階導関数を求める．任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対して，

$$\begin{aligned}
\langle Df,\, \varphi\rangle &\equiv -\langle f,\, \varphi'\rangle \\
&\equiv -\int_{\mathbb{R}} f\varphi'\,dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0} f\varphi'\,dx - \int_0^{\infty} f\varphi'\,dx \\
&= -f(-0)\varphi(0) + \int_{-\infty}^{0} f'\varphi\,dx + f(+0)\varphi(0) + \int_0^{\infty} f'\varphi\,dx \\
&= \langle (f(+0) - f(-0))\delta + \{f'\}\,,\, \varphi\rangle .
\end{aligned}$$

ここで，$\{f'\}$ は，$\Omega^{\pm}$ でそれぞれ $f'$ となる $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ に属する関数である．原点ではその値を特に定義しない．

さらに，各 $m \in \mathbb{N}$ に対し，

$$(103)\quad D^m f = \left\{f^{(m)}\right\} + \sum_{i=0}^{m-1} \left[f^{(i)}\right] \delta^{(m-1-i)}$$

が成り立つ．ここで，

$$\left[f^{(i)}\right] := f^{(i)}(+0) - f^{(i)}(-0)$$

である．

**演習問題 62** (103) を示せ．

## 6.2 Sobolev 空間

Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ の開集合 $\Omega$ を考える．$\Omega$ 上の Lebesgue 二乗可積分関数全体の集合を $L^2(\Omega)$ と書く．すなわち，

$$L^2(\Omega) := \left\{ v:\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \text{可測関数} \mid \int_\Omega |v|^2\,dx < \infty \right\}.$$

各 $m \in \mathbb{N}$ に対して，Sobolev 空間 $H^m(\Omega)$ を次のように定義する：

$$H^m(\Omega) := \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha v \in L^2(\Omega) \quad |\alpha| \le m \right\}.$$

ここで，微分 $D^\alpha := \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}$ は超関数の意味での微分である[22]．以後，超関数微分の記号と通常の微分の記号は区別することなく用いる．この定義式を $m = 0$ に拡張すると $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ であり，以降では，$H^0(\Omega)$ は $L^2(\Omega)$ であるとする．

各 $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し，内積 $(\cdot,\,\cdot)_{m,\Omega}$ を

$$(u,\,v)_{m,\Omega} := \sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x)\,dx$$

で定義する．Sobolev 空間 $H^m(\Omega)$ は，内積 $(\cdot,\,\cdot)_{m,\Omega}$ で Hilbert 空間になる．内積 $(\cdot,\,\cdot)_{m,\Omega}$ に附随するノルムを $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ と書くことにする．

**例 63 (1 次元連続区分 1 次多項式)** $\Omega := (-1,\,1)$ とし，$u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ を

$$u(x) := \begin{cases} x - 1 & \text{if} \quad x \in (-1,\,0), \\ 1 - x & \text{if} \quad x \in (0,\,1) \end{cases}$$

で定義する（図 50 参照）．この時，

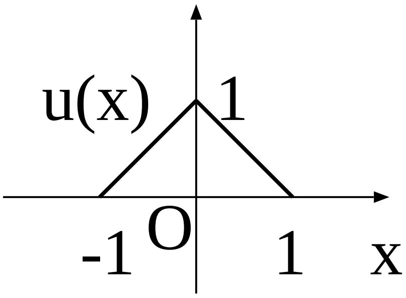


図 50: 区分一次多項式.

$$\begin{aligned} u'(x) &= \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \in (-1,\,0), \\ -1 & \text{if} \quad x \in (0,\,1), \end{cases} \in L^2(\Omega) \\ u''(x) &= -2\delta \notin L^2(\Omega) \end{aligned}$$

が成り立つので，$u \in H^1(\Omega)$ であり，$u \notin H^2(\Omega)$ である．

### 6.2.1 区分的に滑らかな関数が属し得る Sobolev 空間について

有界多角形領域 $\Omega$ は三角形分割がなされているとする．その三角形分割を $\mathcal{T}$ [23]と書く．三角形 $K \in \mathcal{T}$ はその境界を含まない開集合と考えることにする．

三角形分割の辺で，その内部が $\Omega$ に含まれるもの全体の集合を $\mathcal{E}_0$ と書くことにする．辺 $e \in \mathcal{E}_0$ はその端点を含まない集合と考えることにする．また，各 $e \in \mathcal{E}_0$ に対して，$e$ を辺とする三角形の集合を $\mathcal{T}^e$ とする．$\mathcal{T}^e$ に属する三角形は二つ

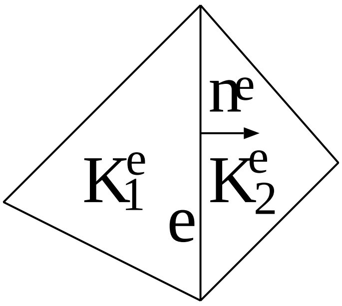


図 51: 辺 $e$ を共有する三角形と辺 $e$ 上の単位法線ベクトル．

であり，番号付けがなされているものとし，$K_1^e, K_2^e$ と書くことにする．さらに，$e$ 上の単位法線ベクトル $n^e = (n_1^e, n_2^e)$ は $K_1^e$ から $K_2^e$ へ向いているものとする (図 51 参照)．

今，関数 $u$ が区分的 $C^m$ 級 $(m \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ であるとは，任意の三角形 $K \in \mathcal{T}$ に対して，$u \in C^m(\overline{K})$ が成り立つこととする．ここで，

$$C^m(\overline{K}) := \left\{ u \in C^m(K) \mid \text{各 } \alpha \in \mathbb{N}_0^2 \ (|\alpha| \leq m) \text{ に対して，} D^\alpha u \text{ が } K \text{ で一様連続} \right\}.$$

一般に，区分的 $C^m$ 級の関数 $u$ は各 $e \in \mathcal{E}_0$ においては，二つの値を持ち，また，三角形分割の各節点では，その節点を共有する三角形の数だけの値を持つものと考える．

**補題 64** 区分的 $C^1$ 級関数 $u$ に対して，次が成り立つ:

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = \sum_{e \in \mathcal{E}_0} \int_e [u]_e n_j^e \varphi \, d\Gamma - \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (j = 1, 2).$$

ここで，

$$[u]_e := u|_{K_1^e} - u|_{K_2^e}.$$

このことから，$u$ の超関数微分 $D_j u$ は次のように表現できる：

$$D_j u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\} - \sum_{e \in \mathcal{E}_0} [u]_e n_j^e \delta_e. \tag{104}$$

ここで，$\left\{ \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \right\}$ は $u$ を各要素で通常の意味での微分をすることによって得られる関数を表す．また，$\delta_e$ の定義に関しては，より一般に，曲線 (曲面)$S$ 上で定義された適当な関数 $\mu(\boldsymbol{x})$ に対して，

$$\langle \mu \delta_S, \varphi \rangle := \int_S \mu \varphi \, d\Gamma$$

によって，超関数 $\mu \delta_S$ を定義することができる[24]．

**証明**． 任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して，

$$\begin{aligned} \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \left[ \int_{\partial K} u \varphi n_j \, d\Gamma - \int_K \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi \, dx \right] \\ &= \sum_{e \in \mathcal{E}_0} \int_e [u]_e n_j \varphi \, d\Gamma - \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi \, dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

---

[22] $L^2(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ であることに注意する．

[23] $\mathcal{T}$ は三角形分割をなす全ての三角形から成る集合である．

[24] 超関数 $\mu\delta_S$ は，曲線 $S$ 上におかれた密度 $\mu$ の一重層と呼ばれる．また，超関数 $\mu\delta_S$ は特異超関数となることに注意せよ．

**命題 65** 区分的 $C^1$ 級関数 $u$ に対して，次が成り立つ:

$$u \in C^0(\overline{\Omega}) \Longleftrightarrow u \in H^1(\Omega).$$

**証明．**
($\Longrightarrow$) $u \in C^0(\overline{\Omega})$ とすると，任意の $e \in \mathcal{E}_0$ に対して，$[u]_{e,j} = 0$ $(j = 1, 2)$ が成り立つので，補題 64 の (104) より，

$$D_j u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\}$$

が成り立つことが分かる．ここで，前述のように，左辺は $u$ の超関数微分であり，右辺は $u$ を各要素で通常の意味での微分をすることによって得られる関数である．この右辺は $L^2(\Omega)$ に属するので，$u \in H^1(\Omega)$ となることが分かる．

($\Longleftarrow$) 背理法によって示す．区分的 $C^1$ 級関数で，$u \in H^1(\Omega)$ かつ $u \notin C^0(\overline{\Omega})$ なるものが存在するとする．この時，$u$ の不連続点 $x^0 \in \overline{\Omega}$ が存在する．今，$u$ は区分的に連続であるので，ある $e^0 \in \mathcal{E}_0$ が存在して，$x^0 \in \overline{e^0}$ となる．さらに，$u|_{K_1^{e^0}}(x^0) - u|_{K_2^{e^0}}(x^0) \neq 0$ となる．$u|_{K_1^{e^0}} - u|_{K_2^{e^0}} \in C^0(\overline{e^0})$ なので，ある $\varepsilon^0 > 0$ が存在して，

$$u|_{K_1^{e^0}}(x) - u|_{K_2^{e^0}}(x) > 0 \quad (\text{or } < 0) \quad \forall x \in \overline{e^0} \cap B_{\varepsilon^0}(x^0)$$

が成り立つ．ここで，

$$B_{\varepsilon^0}(x^0) := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x^0| < \varepsilon^0 \right\}.$$

よって，$n_e^{j^0} \neq 0$ となる $j^0 \in \{1, 2\}$ とある $\varphi^0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ が存在して，

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_0} \int_e [u]_e n_{j^0} \varphi^0 \, d\Gamma = \int_{e^0} [u]_{e^0} n_{j^0} \varphi^0 \, d\Gamma \neq 0$$

となる．補題 64 より，$u$ の超関数微分 $D_{j^0} u$ は特異超関数となり，$L^2(\Omega)$ に属さないことがわかる．これは $u \in H^1(\Omega)$ であることに矛盾する．したがって，$u \in H^1(\Omega)$ ならば $u \in C^0(\overline{\Omega})$ となることが分かった． ■

**定理 66** 有界多角形領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ に対し，三角形分割 $\mathcal{T}$ が施されているとする．この時，区分 $C^m$ 級関数 $u$ $(m \in \mathbb{N})$ に対して，

$$u \in C^{m-1}(\overline{\Omega}) \Longrightarrow u \in H^m(\Omega)$$

が成り立つ[25]．

**証明．** 帰納法で示す．$m = 1$ の時は，命題 65 より成り立つので，$m$ の時を仮定して，$m + 1$ の時を示す．$u \in C^m(\overline{\Omega})$ とすると，$u \in C^{m-1}(\overline{\Omega})$ なので，帰納法の仮定より，$u \in H^m(\Omega)$ となるので，あとは，$|\alpha| = m + 1$ なる各 $\alpha$ に対して，$D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ を示せば良い．$D^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_j} D^{\alpha'} u$ $(|\alpha'| = m)$ と書けるとして良い．この時，$D^{\alpha'} u \in C^0(\overline{\Omega})$ であり，$D^{\alpha'} u \in C^1(\overline{K})$ $(\forall K \in \mathcal{T})$ なので，命題 65 より，$D^{\alpha'} u \in H^1(\Omega)$ となることが分かる．これより，

$$D^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_j} D^{\alpha'} u \in L^2(\Omega)$$

となることが分かる． ■

## 6.3 弱形式再考

第 2 節で Poisson 方程式の混合境界値問題：

$$(105) \quad \begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= g_1 \quad \text{on} \quad \Gamma_1 \quad (\text{Dirichlet 境界条件}), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} &= g_2 \quad \text{on} \quad \Gamma_2 \quad (\text{Neumann 境界条件}) \end{cases}$$

を考え，その弱形式 (41) を導出した．ここでは，Sobolev 空間を用いてその弱形式を定式化する．そして，境界値問題 (105) と弱形式との同値性について，数学的に厳密に議論し直す．

そのために，領域の境界の滑らかさについて考え，Sobolev 空間の元に対するトレース定理を紹介する．

---

[25] ”$\Longleftarrow$” については，著者が成立するか否か分かっていないだけ．

### 6.3.1　境界の滑らかさ

Nečas[18, Chap. 1,§1.3], Grisvard[20, Def. 1.2.1.1] にしたがって，境界の滑らかさを定義する．

**定義 67 (境界の滑らかさ)** 開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ の境界 $\Gamma$ が $C^k$ (resp. $C^{k,1}$) 級 $(k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ であるとは，次が成り立つことである：任意の $x \in \Gamma$ に対して，$x$ のある近傍 $V$ と直行座標系 $y = (y_1, \ldots, y_d)$ が存在して，

(a) $V = \{y = (y_1, \ldots, y_d) \mid -a_j < y_j < a_j \ (1 \leq j \leq d)\}$. ここで，$a_j > 0$ $(1 \leq j \leq d)$ である．

(b) ある $\varphi \in C^k(\overline{V'})$ (resp. $C^{k,1}(\overline{V'})$) が存在して，

$$\begin{array}{rcl} (106)\ |\varphi(y')| & \leq & \dfrac{a_d}{2} \quad \forall y' = (y_1, \ldots, y_{d-1}) \in V' := \{y \in V \mid y_d = 0\}, \\ \Omega \cap V & = & \{y = (y', y_d) \in V \mid y_d < \varphi(y')\}, \\ \Gamma \cap V & = & \{y = (y', y_d) \in V \mid y_d = \varphi(y')\} \end{array}$$

が成り立つ（図 52 参照）．

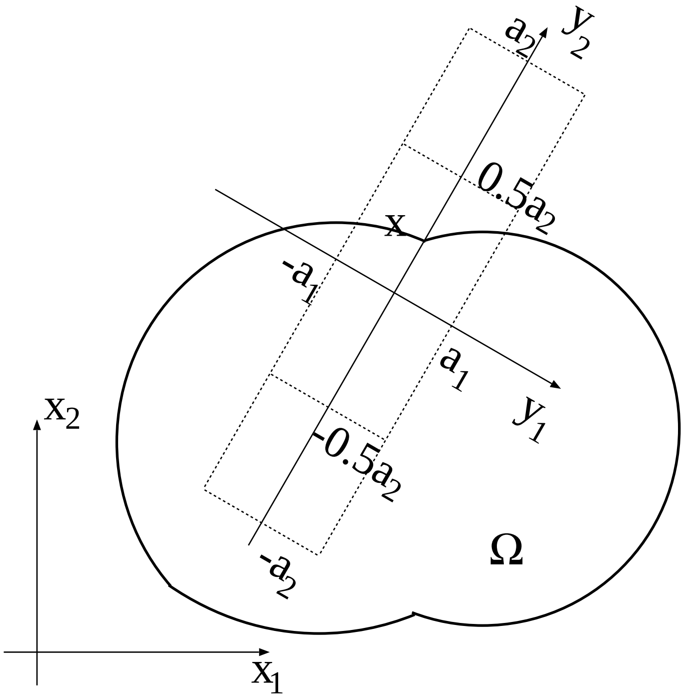


図 52: Ω の境界に対する局所座標.

開集合 $\Omega$ の境界 $\Gamma$ が $C^{0,1}$ 級の時，特に，境界 $\Gamma$ は Lipschitz 境界であると言ったりする．多角形領域の境界は Lipschitz 境界である．境界の病的な例については，図 53, 54, 55 [26]や [20] を参照せよ．

### 6.3.2　$L^2(\Gamma)$ の定義

有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ の境界 $\Gamma := \partial\Omega$ は，Lipschitz 境界であるとする．定義 67 (境界の滑らかさの定義) で現れる近傍からなる $\Gamma$ の有限開被覆：$V_l$ $(l = 1, 2, \ldots, L)$ をとることができる．近傍 $V_l$ に付随する座標を $y_l = (y_{l,1}, y_{l,2}, \ldots, y_{l,d}) = (y'_l, y_{l,d})$ とし，$\Gamma \cap V_l$ を表現する関数を $\varphi_l$ とする．この時，$L^2(\Gamma)$ とその内積を以下のように定義する．

---

[26] 多面体の定義については，例えば，加藤十吉 [27, §5] に述べられているよ．

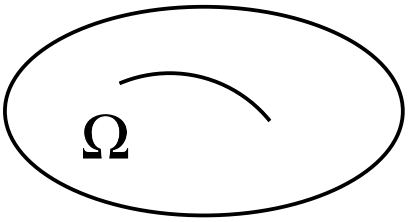


図 53: スリットの入った領域．$C^0$ 級にもならない．このような領域はとりあえず除外する．

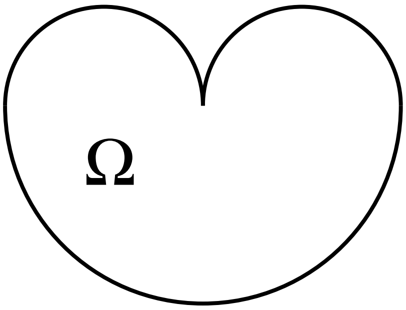


図 54: 境界にカスプがある領域．Lipschitz 境界にはならない．

(107) $L^2(\Gamma) := \left\{ f \mid f(y_l', \varphi_l(y_l')) \in L^2(V_l')\ (1 \le l \le L) \right\}$,

(108) $$(f,\, g)_{L^2(\Gamma)} := \sum_{l=1}^{L} \int_{V_l'} f(y_l',\, \varphi_l(y_l'))g(y_l',\, \varphi_l(y_l'))\, dy_l'.$$

付随するノルムを $\|f\|_{L^2(\Gamma)}$ と書く．

Nečas[18, Chap. 3, Lemme 1.1] によれば，定義 107 による $L^2(\Gamma)$ の定義は近傍のとり方に依らない．さらに，Nečas[18, Chap. 2, Théorème 4.1] によれば，$L^2(\Gamma)$ は内積 $(\cdot,\, \cdot)_{L^2(\Gamma)}$ で Hilbert 空間になる．

今，開被覆 $\{V_l\}_{l=1}^L$ に付随する $\Gamma$ の単位の分解を $\{\Phi_l\}_{l=1}^L$ とする．すなわち，$\{\Phi_l\}_{l=1}^L$ は次を満たすものとする：

i) $\Phi_l \in \mathcal{D}(V_l)\ (1 \le l \le L)$,

ii) $0 \le \Phi_l \le 1\ (1 \le l \le L)$,

iii) $\displaystyle\sum_{l=1}^{L} \Phi_l(x) \equiv 1\ (\forall x \in \Gamma)$.

単位の分解 $\{\Phi_l\}_{l=1}^L$ の存在については，[18, Chap. 1, Proposition 2.3] を見よ．単位の分解 $\{\Phi_l\}_{l=1}^L$ を用いることによって，

(109) $$\int_\Gamma f\, d\Gamma = \sum_{l=1}^{L} \int_{V_l'} f(y_l',\, \varphi_l(y_l'))\Phi(y_l',\, \varphi_l(y_l')) \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{d-1} \left[ \frac{\partial \varphi_l}{\partial y_{l,j}}(y_l') \right]^2 \right\}^{1/2} dy_l'$$

と書けるが，Nečas[18, Chap. 3, Lemme 1.2] によって，ある正定数 $C_1, C_2$ が存在して，

(110) $$C_1 \int_\Gamma |f|^2\, d\Gamma \le \sum_{l=1}^{L} \int_{V_l'} |f(y_l',\, \varphi_l(y_l'))|^2\, dy_l' \left( \equiv \|f\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) \le C_2 \int_\Gamma |f|^2\, d\Gamma \quad \forall f \in L^2(\Gamma)$$

が成り立つことが示されている．

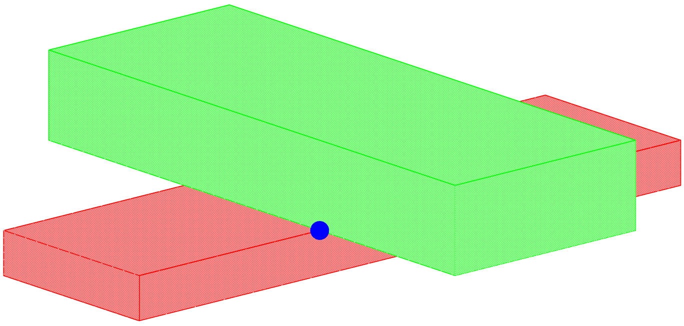


図 55: 境界が $C^0$ 級でない多面体領域 (McLean[41] からの引用).

### 6.3.3 $L^2(\Gamma_1)$ の定義

境界 $\Gamma$ の部分集合 $\Gamma_1$ を考える．$\Gamma_1$ 上で定義された関数 $f$ に対して，

$$\tilde{f} := \begin{cases} f & \text{on} \quad \Gamma_1, \\ 0 & \text{on} \quad \Gamma \setminus \Gamma_1 \end{cases}$$

とする．$L^2(\Gamma_1)$ を次のように定義する：

$$(111)\quad L^2(\Gamma_1) := \left\{ f \mid \tilde{f} \in L^2(\Gamma) \right\}.$$

内積を

$$(112)\quad (f,\, g)_{L^2(\Gamma_1)} := (\tilde{f},\, \tilde{g})_{L^2(\Gamma_1)}$$

で定義すると，前述の Nečas の結果より，$L^2(\Gamma_1)$ は Hilbert 空間になることが分かる．

$\int_{\Gamma_1} |f|^2 \, d\Gamma = \int_{\Gamma} |\tilde{f}|^2 \, d\Gamma$ より，(110) から，

$$(113)\quad C_1 \int_{\Gamma_1} |f|^2 \, d\Gamma \le \|f\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \le C_2 \int_{\Gamma_1} |f|^2 \, d\Gamma \quad \forall f \in L^2(\Gamma)$$

が成り立つ．

本講義では，$L^2(\Gamma_1)$ の内積とノルムを

$$(f,\, g)_{0,\Gamma_1} \quad := \quad \int_{\Gamma_1} fg \, d\Gamma, \qquad \|f\|_{0,\Gamma_1} := (f,\, f)^{1/2}_{0,\Gamma_1}$$

とする．$L^2(\Gamma_1)$ において，$\|\cdot\|_{0,\Gamma_1}$ と $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma_1)}$ は互いに同値なノルムなので，$L^2(\Gamma_1)$ は，内積 $(\cdot,\, \cdot)_{0,\Gamma_1}$ で Hilbert 空間になることが分かる．

### 6.3.4 トレース定理

**定理 68 (稠密性定理)** 有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \ge 2)$ の境界 $\Gamma$ が $C^0$ 級であるとする．$C^\infty_{\overline{\Omega}}$ は $H^m(\Omega)$ $(m \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ で稠密である．ここで，

$$C^\infty_{\overline{\Omega}} := \left\{ u = \tilde{u}|_{\overline{\Omega}} \mid \tilde{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

**証明．** Nečas[18, Chap. 2, Théorème 3.1] を見よ． ■

Nečas[18, Chap. 1, Théorème 1.2] によるトレース定理を与える．

**定理 69 (トレース定理)** 有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ の境界 $\Gamma$ が Lipschitz 境界であるとする．この時，ある $\gamma \in \mathcal{L}(H^1(\Omega),\, L^2(\Gamma))$ が存在して，

$$(\gamma v)(x) = v(x) \quad \forall v \in C^\infty_{\overline{\Omega}}, \quad \forall x \in \Gamma$$

が成り立つ．ここで，$\mathcal{L}(X,\, Y)$ はノルム空間 $X$ からノルム空間 $Y$ への全ての有界線形作用素からなる集合を表すこととする．作用素 $\gamma$ をトレース作用素と呼ぶ．

**証明**．定義 67 の近傍 $V$ と直行座標系 $y = (y_1,\, \dots,\, y_d)$ を一つ固定して考える．任意の $v \in C^\infty_{\overline{\Omega}}$ に対して，次の評価式が成り立つ：

$$(114) \quad \int_{V'} \left|v(y',\, \varphi(y'))\right|^2 \, dy' \leq C\|v\|^2_{1,\Omega}.$$

ここで，$C$ は $v$ に依らない正定数である．以下で，この評価式を導く．任意の $y' \in V'$ に対して，

$$v(y',\, \varphi(y')) = \int_t^{\varphi(y')} \frac{\partial v}{\partial y_d}(y'\,, s)\, ds + v(y',\, t) \qquad \forall t \in (-a_d,\, \varphi(y'))$$

が成り立つ．この式の両辺を二乗して，その右辺に Schwarz の不等式を (2 回) 適用し，(106) を使うと，

$$|v(y',\, \varphi(y'))|^2 \leq 2\left(\frac{3}{2}a_d \int_t^{\varphi(y')} \left|\frac{\partial v}{\partial y_d}(y'\,, s)\right|^2 ds + |v(y',\, t)|^2\right) \qquad \forall t \in (-a_d,\, \varphi(y'))$$

が成り立つことが分かる．この両辺の $\displaystyle\int_{-a_d}^{\varphi(y')} dt$ をとり，再び (106) を使うと，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_d|v(y',\, \varphi(y'))|^2 &\leq \int_{-a_d}^{\varphi(y')} |v(y',\, \varphi(y'))|^2\, dt \\ &\leq 2\left[\left(\frac{3}{2}a_d\right)^2 \int_t^{\varphi(y')} \left|\frac{\partial v}{\partial y_d}(y'\,, s)\right|^2 ds + \int_{-a_d}^{\varphi(y')} \left|v(y',\, t)\right|^2 \, dt\right] \end{aligned}$$

を得る．この両辺の $\displaystyle\int_{V'} dy'$ をとると，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_d \int_{V'} |v(y',\, \varphi(y'))|^2\, dy' &\leq \int_{-a_d}^{\varphi(y')} |v(y',\, \varphi(y'))|^2\, dt \\ &\leq 2\left[\left(\frac{3}{2}a_d\right)^2 \int_{V'} dy' \int_t^{\varphi(y')} \left|\frac{\partial v}{\partial y_d}(y'\,, s)\right|^2 ds + \int_{V'} dy' \int_{-a_d}^{\varphi(y')} \left|v(y',\, t)\right|^2 \, dt\right] \\ &\leq C\|v\|^2_{1,\Omega} \end{aligned}$$

となり，(114) が得られる．

評価式 (114)，第 6.3.2 節の考察，および，定理 68 より，定理 69 が成り立つことが分かる． ■

**註記 70** 領域 $\Omega$ を

$$\Omega := \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ |y| < x^5\right\}$$

とすると，$\Omega$ の境界は $C^0$ 級であるが，Lipschitz ではない．今，$\Omega$ の境界の一部：

$$\Gamma_+ := \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ y = x^5\right\}$$

とする．$u(x,\, y) = x^{-1}$ とした時，$u \in H^1(\Omega)$ となるが，

$$\int_{\partial\Omega} |u|^2\, d\Gamma \geq \int_{\Gamma_+} |u|^2\, d\Gamma = \int_0^1 x^{-2}\sqrt{1 + (5x^4)^2}\, dx \geq \int_0^1 x^{-2}\, dx = \infty.$$

### 6.3.5 弱形式の再定式

問題 (105) の有界領域 $\Omega$ の境界 $\Gamma$ は Lipschitz 境界であるとする．さらに，$\Gamma_1, \Gamma_2$ は $\Gamma$ の開集合とし，$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2} = \Gamma$ となるものとする．境界 $\Gamma_1$ へのトレース作用素 $\gamma_1 \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), L^2(\Gamma_1))$ を

$$\gamma_1 u := \gamma u|_{\Gamma_1} \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

で定義する．

非斉次 Dirichlet データ $g_1$ は $g_1 \in \gamma_1 H^1(\Omega)$ とする．関数空間を導入する．

$$\begin{aligned} V(g_1) &:= \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid \gamma_1 v = g_1 \right\}, \\ V &:= \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid \gamma_1 v = 0 \right\}. \end{aligned}$$

以後，$\gamma_1 v = g_1$ や $\gamma_1 v = 0$ を “$v = g_1$ on $\Gamma_1$” や “$v = 0$ on $\Gamma_1$” と書くこともある．問題 (39) の弱形式は数学的に厳密に，次のように書かれる：

$$(115) \quad \begin{cases} \text{Find } u \in V(g_1) \text{ such that} \\ a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

ここで，

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \\ F(v) &:= \int_\Omega f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g_2 v \, d\Gamma. \end{aligned}$$

ここで，$g_2 \in L^2(\Gamma_2)$ を仮定している．

### 6.3.6 弱形式 (115) の一意可解性

まず，弱形式 (115) の一意可解性について証明する．そのための準備をする．

**補題 71** 空間 $V$ は $H^1(\Omega)$ の閉部分空間になる．

**演習問題 72** 補題 71 を証明せよ．

Nečas[18, Chap. 1, Théorème 1.9] の結果を次の補題とする．

**補題 73** 有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ の境界 $\Gamma$ が Lipschitz 境界であるとする．開集合 $\Gamma_1$ $(\subset \Gamma)$ は $\emptyset$ でないものとする．この時，ある正定数 $C$ が存在して，

$$(116) \quad \|v\|_{1,\Omega} \leq C \left( \int_{\Gamma_1} |v|^2 \, d\Gamma + \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \right)^{1/2} \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

が成り立つ．

補題 73 は，第 6.3.8 節で証明する．

補題 73 から，

$$(117) \quad \|v\|_{1,\Omega} \leq C|v|_{1,\Omega} \quad \forall v \in V$$

が成り立つことが分る．ここで，$|\cdot|_{1,\Omega}$ は $H^1(\Omega)$ のセミノルムであり，一般に，$m \in \mathbb{N}$ に対して，

$$|v|_{m,\Omega} := \left( \int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

で定義される．不等式 (117) は Poincaré の不等式と呼ばれる．

Poincaré の不等式 (117) より，$V$ においては，$|\cdot|_{1,\Omega}$ と $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ は互いに同値なノルムとなることが分かる．このことから，$V$ は $a(\cdot, \cdot)$ を内積とする Hilbert 空間になることが分かる．

**定理 74** 任意の $f \in L^2(\Omega)$, 任意の $g_1 \in \gamma_1 H^1(\Omega)$, 任意の $g_2 \in L^2(\Gamma_2)$ に対して，問題 (115) の解は一意的に存在する．

**証明．** $g_1 \in \gamma_1 H^1(\Omega)$ なので，ある $w \in H^1(\Omega)$ が存在して，$\gamma_1 w = g_1$ となる．

今，$u$ が問題 (115) を満たす関数とし，$u_0 := u - w$ とおくと，$u_0 \in V$ となり，さらに，$u_0$ は

$$(118)\quad a(u_0, v) = F(v) + a(w, v) \quad \forall v \in V$$

を満たさなくてはならない．ここで，$G(v) := F(v) + a(w, v)$ とし，$G$ が $V$ 上の有界線形汎関数であることを示す．任意の $v \in V$ に対して，

$$\begin{aligned} |G(v)| &\leq \left|\int_\Omega f v\,dx\right| + \left|\int_{\Gamma_2} g_2 v\,d\Gamma\right| + \left|\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v\,dx\right| \\ &=: |\mathrm{I}| + |\mathrm{II}| + |\mathrm{III}|. \end{aligned}$$

各項を評価する：

$$\begin{aligned} |\mathrm{I}| &\leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \quad (\text{Schwarz の不等式より}) \\ &\leq C \|f\|_{0,\Omega} |v|_{1,\Omega} \quad (\text{Poincaré の不等式 (117) より}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathrm{II}| &\leq \|g_2\|_{0,\Gamma_2} \|\gamma_2 v\|_{0,\Gamma_2} \quad (\text{Schwarz の不等式より}) \\ &\leq \|g_2\|_{0,\Gamma_2} \|\gamma_2\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega), L^2(\Gamma_2))} \|v\|_{1,\Omega} \quad (\text{トレース作用素の有界性より}). \\ &\leq C \|g_2\|_{0,\Gamma_2} |v|_{1,\Omega} \quad (\text{Poincaré の不等式 (117) より}). \end{aligned}$$

$$|\mathrm{III}| \leq |w|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} \quad (\text{Schwarz の不等式より}).$$

ここで，$C$ は $v \in V$ に依らないある正定数である．これらの評価より，$G$ が $V$ 上の有界線形汎関数であることが分かる．よって，Riesz の表現定理より，ある唯一つの $u_0 \in V$ が存在して，(118) を満たす．ここで，$u := w + u_0$ と定義すると，$u$ は問題 (115) の解となる．

次に，解の一意性を示す．問題 (115) の解を $u, u'$ とすると，$u - u' \in V$ であり，$a(u - u', v) = 0\ \forall v \in V$ が成り立ち，$a(\cdot, \cdot)$ は $V$ の内積だから，$u - u' = 0$ でなくてはならない．すなわち，$u = u'$. ■

### 6.3.7 境界値問題 (105) と弱形式 (115) の同値性

問題 (105) と弱形式 (115) の同値性について考えるために，問題 (105) の意味を考える．

問題 (105) の既知のデータは，それぞれ，$f \in L^2(\Omega)$, $g_1 \in \gamma_1 H^1(\Omega)$, $g_2 \in L^2(\Gamma_2)$ を満たすものとする．問題 (105) の解 $u$ は $H^2(\Omega)$ に属するものとする．すると，問題 (105) の各式は，

$$(119)\quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } L^2(\Omega), \\ \gamma_1 u = g_1 & \text{in } L^2(\Gamma_1), \\ \displaystyle\sum_{j=1}^d n_j \gamma_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = g_2 & \text{in } L^2(\Gamma_2) \end{cases}$$

と解釈することができる．この解釈のもとで，問題 (105) と弱形式 (115) の同値性を示す．そのために，$H^1$ 関数に対して Green の公式が成立することを確認する．

**定理 75 (Green の公式)** 有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ の境界 $\Gamma$ が Lipschitz 境界であるとする．任意の $u, v \in H^1(\Omega)$ に対して，

$$(120)\quad \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\,dx = \int_\Gamma u v n_i\,d\Gamma - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx \quad (1 \leq i \leq d)$$

が成り立つ．ここで，$n = (n_1, \ldots, n_d)$ は境界 $\Gamma$ 上の外向き単位法線ベクトルである．

**証明.** Nečas[18, Chap. 3, Théorème 1.1] を見よ． ■

**定理 76** $\gamma_2 V$ が $L^2(\Gamma_2)$ で稠密であると仮定する．任意に $f \in L^2(\Omega)$, $g_1 \in \gamma_1 H^1(\Omega)$, $g_2 \in L^2(\Gamma_2)$ が与えられているものとする．問題 (119) の解 $u$ が $H^2(\Omega)$ に属する時，$u$ は問題 (115) の解となる．逆に，問題 (115) の解 $u$ が $H^2(\Omega)$ に属する時，問題 (119) の解となる．

**証明.** 第 2.1 節において弱形式を導いた方法で，(119) の解 $u$ が $H^2(\Omega)$ に属する時には，Green の公式を用いることができるので，$u$ は (115) の解になることが分る．

逆に，(115) の解が (119) の解になることを示す．関数 $u$ が (115) の解であるとする．$u \in H^2(\Omega)$ とすると，任意の $v \in V$ に対して，(115) の第一式の左辺に Green の公式 (120) を適用すると，

$$(121)\quad \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\Gamma - \int_\Omega \Delta u v\, dx = \int_\Omega f v\, dx + \int_{\Gamma_2} g_2 v\, d\Gamma$$

となる．ここで，$\partial u/\partial n$ は

$$\frac{\partial u}{\partial n} := \sum_{j=1}^d n_j \gamma_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

で定義されるものとする．任意の $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ $(\subset V)$ に対しては，

$$\int_\Omega (-\Delta u - f)\, v\, dx = 0$$

となり，定理 54 から，

$$-\Delta u - f = 0 \quad \text{a.e. in} \quad \Omega$$

となることが分る．これより，$u$ は (119) の第一式を満たすことが分る．これを (121) に代入すると，任意の $v \in V$ に対して，

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\Gamma = \int_{\Gamma_2} g_2 v\, d\Gamma$$

が成り立つ．$\gamma_2 V$ が $L^2(\Gamma_2)$ で稠密であると仮定しているので，(119) の第三式（Neumann 条件）を満たされることが分る．

(119) の第二式（Dirichlet 条件）を満たされることは，$u \in V(g_1)$ なので，明らかである．

以上より，(115) の解が (119) の解になることが分った． ■

**註記 77 ($H^1$-solution が存在しない例)** 領域 $\Omega$ を

$$\Omega := \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < 1,\ 0 < \theta < \omega\right\}$$

とし，次の混合境界値問題を考える:

$$(122)\quad \begin{cases} -\Delta u &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_0 := \{0 < r < 1,\ \theta = 0\}, \\ u &= \omega \quad \text{on} \quad \Gamma_\omega := \{0 < r < 1,\ \theta = \omega\}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_N := \{r = 1,\ 0 < \theta < \omega\}. \end{cases}$$

この問題の解は $u = \theta$ で与えられるが，$\theta \notin H^1(\Omega)$ となる．

非斉次 Dirichlet データは，$H^1(\Omega)$ に属する関数のトレースにはなり得ない関数になっている．より詳しく述べると，$\Gamma_0, \Gamma_\omega$ の関数 $g_0, g_\omega$ に対し，ある $u \in H^1(\Omega)$ が存在して，

$$g_0 = \gamma_0 u \wedge g_\omega = \gamma_\omega u$$

となるための必要十分条件は，

$$g_0 \in H^{1/2}(\Gamma_0) \wedge g_\omega \in H^{1/2}(\Gamma_\omega)$$

かつ

$$(123)\ \exists\delta > 0 \text{ s. t. } \int_0^\delta |g_0(r) - g_\omega(r)|^2 \frac{dr}{r} < \infty$$

が成立することである．すなわち，上記の非斉次 Dirichlet データは，(123) を満たし得ないのである．(123) は適合条件 (Compatibility Condition) と呼ばれる ([20, 21] 参照)．

### 6.3.8　補題 73 の証明

補題 73 を証明するために，いくつかの用意をする．

**補題 78** $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を有界領域，$v \in H^{k+1}(\Omega)$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ とし，

$$(124)\ D^\alpha v \equiv 0 \quad \forall\alpha \in \mathbb{N}_0^d \quad \text{satisfying} \quad |\alpha| = k+1$$

が成り立つものとする．この時，$v \in P_k$ となる．

**証明**．第 6.3.9 節を見よ．　■

**定理 79 (Rellich の定理)** 有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ の境界は $C^0$ 級であるとする．$H^1(\Omega)$ から $L^2(\Omega)$ への恒等作用素はコンパクトである．

**証明**．Nečas [18, Chap. 1, Théorème 1.4] の証明を見よ．　■

**補題 73 の証明**．背理法で示す．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，ある $v_n \in H^1(\Omega)$ が存在して，$\|v_n\|_{1,\Omega} = 1$ かつ

$$(125)\ 1 > n\left(|v_n|_{1,\Omega}^2 + \|v_n\|_{0,\Gamma_1}^2\right)^{1/2}$$

が成立すると仮定する．

この時，定理 79 より，ある部分列 $\{v_{n_l}\} \subset \{v_n\}$ が存在して，$H^1(\Omega)$ で収束列となる．すなわち，

$$(126)\ v_{n_l} \longrightarrow v \quad \text{in} \quad L^2(\Omega) \quad (l \longrightarrow \infty).$$

不等式 (125) より，

$$(127)\ |v_n|_{1,\Omega} \leq 1/n$$

であることを合わせると，$\{v_{n_l}\}$ は $H^1(\Omega)$ における Cauchy 列となる．よって，$v_{n_l} \longrightarrow v$ in $H^1(\Omega)$ $(l \longrightarrow \infty)$．この時，式 (127) より，

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} \equiv 0 \quad 1 \leq \forall j \leq d$$

でなくてはならない．よって，補題 78 より，$v \in P_0$ となる．

定理 69 より，

$$(128)\ v_{n_l} \longrightarrow v \quad \text{in } L^2(\Gamma_1) \quad (l \longrightarrow \infty).$$

一方，式 (125) より，

$$(129)\ \|v_{n_l}\|_{0,\Gamma_1} \longrightarrow 0 \quad (l \longrightarrow \infty).$$

ここで，$v \in P_0$ であることを考慮すると，式 (128), (129) より，$v \equiv 0$ となることが分かる．すると，$1 = \lim_{l\longrightarrow\infty} \|v_{n_l}\|_{1,\Omega} = \|v\|_{1,\Omega} = 0$ となり，矛盾が生ずる．　■

### 6.3.9　補題 78 の証明

補題 78 を示す前に，補題 78 の条件 $v \in H^{k+1}(\Omega)$ を $v \in C^{k+1}(\Omega)$ に替えた次の補題を証明する．

**補題 80** $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を有界領域，$v \in C^{k+1}(\Omega)$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ とし，

(130) $D^\alpha v \equiv 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d \quad \text{satisfying} \quad |\alpha| = k+1$

が成り立つものとする．この時，$v \in P_k$ となる．

**証明．** *Step* 1. まず，$\Omega$ の任意の点 $a$ のある近傍で，$v$ は $k$ 次多項式として表されることを示す．任意の $a \in \Omega$ に対し，ある $\delta_a > 0$ が存在して，$\overline{B(a;\,\delta_a)} \subset \Omega$ が成り立つ．ここで，$B(a;\,\delta_a) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x-a| < \delta_a\}$ である．Taylor の公式より，任意の $x \in B(a;\,\delta_a)$ に対し，ある $\theta_x \in (0,\,1)$ が存在して，

$$v(x) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha v(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha v(\theta_x(x-a)+a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha$$

が成り立つので，(130) より，

$$v(x) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha v(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha \quad \forall x \in B(a;\,\delta_a)$$

が成り立つ．

*Step* 2. 次に，

$$p_a(x) := \sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha v(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha \in P_k$$

とし，

$$v(x) = p_a(x) \quad \forall x \in \Omega$$

を示す．このためには，$u(x) := v(x) - p_a(x)$ とし，任意の $b \in \Omega$ に対し，

(131) $u(b) = 0$

を示せばよい．$\Omega$ は領域，すなわち，連結開集合なので，$a$ と $b$ を結ぶ連続曲線 $C \subset \Omega$ が存在する．ここで，曲線 $C$ は $C = \{x(t) \in \mathbb{R}^d \mid t \in I := [0,\,1]\}$ と表され，さらに，$x(t)$ は $x(0) = a,\, x(1) = b$ を満たすとして良い．*Step* 1 より，曲線 $C$ 上の各点 $x(t)$ において，ある開近傍が存在し，その開近傍で $u$ は $k$ 次多項式となることが分かる．曲線 $C$ はコンパクト集合なので，これらの開近傍から $C$ の有限開被覆を選び出すことができる．すなわち，ある $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_N = 1$ が存在して，$x(t_n)$ $(1 \le n \le N)$ の上述の開近傍を $B_n$ とする時，

(132) $C \subset U := \displaystyle\bigcup_{n=1}^{N} B_n$

が成り立つ．

今，開集合 $U_n$ $(n = 1,\,2,\,\ldots)$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned} U_1 &:= B_1, \\ U_n &:= \bigcup \{B_n \mid B_n \cap U_{n-1} \neq \emptyset\} \quad (n \ge 2). \end{aligned}$$

この時，ある $1 \le k \le N$ が存在して，

(133) $U_1 \underset{\neq}{\subset} U_2 \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} U_k = U$

が成り立つ．後ほどこれを示す．今，これを認めると，$U_1$ 上で $u \equiv 0$ であり，任意の $B_n \in \{B_n \mid B_n \cap U_1 \neq \emptyset\}$ 対して，空でない開集合 $B_n \cap U_1$ 上で $u \equiv 0$ であり，$u$ は $B_n$ 上で $k$ 次多項式なので，$B_n$ 上で $u \equiv 0$ となる．これより，$U_2$ 上

で $u \equiv 0$ となることが分かる．この議論を繰り返すことによって，$U_k = U$ 上で $u \equiv 0$ となることが分かる．すなわち，(131) が成り立つことが分かった．

*Step* 3. 最後に，(133) を示す．このためには，$U$ が有限個の集合 $B_n$ $(1 \le n \le N)$ の和集合であるので，ある $l \ge 1$ が存在して，$U_l = U_{l+1}$ が成り立つならば，

(134) $U_l = U$

となることを示せばよい．これを背理法によって示す．$U_l \underset{\neq}{\subset} U$ と仮定する．すると

$$V_l := \bigcup \{B_n \mid B_n \cap U_l = \emptyset\} \neq \emptyset$$

となり，$U = U_l \cup V_l$ かつ

(135) $U_l \cap V_l = \emptyset$

となる．$x : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ は連続なので，$x^{-1}(U_l)$ および $x^{-1}(V_l)$ は $I$ における開集合となり，さらに，

(136) $I = x^{-1}(U_l) \cup x^{-1}(V_l)$,

(137) $x^{-1}(U_l) \neq \emptyset, \quad x^{-1}(V_l) \neq \emptyset$

となる．$I$ は連結集合であるから，(136) と (137) より，

$$x^{-1}(U_l) \cap x^{-1}(V_l) \neq \emptyset$$

となる．これより，ある $\hat{t} \in x^{-1}(U_l) \cap x^{-1}(V_l)$ が存在して，$x(\hat{t}) \in U_l \cap V_l$ となる．これは，(135) に矛盾する．ゆえに (134) が示せた．■

**補題 78 の証明：** 補題 80 より，$\Omega$ の任意の点 $a$ のある近傍で，$v$ は $k$ 次多項式として表されることを示せば良い．証明には，Friedrichs の軟化作用素 (mollifier) を用いる．(これについては [22, 6.2 節] を見よ．) 任意の $a \in \Omega$ に対し，ある $\delta_a > 0$ が存在して，$\overline{B(a;\delta_a)} \subset \Omega$ が成り立つ．以後，簡単に $B_a := B(a;\delta_a)$ と書くことにする．ここで，$\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ は [22, p.120] で定義される $j_\varepsilon$ とする．任意の $0 < \varepsilon < d(B_a, \Omega^c)$ に対して，$\rho_\varepsilon * v \in C^\infty(B_a)$ であり[27]，

$$D^\alpha (\rho_\varepsilon * v)(x) = \rho_\varepsilon * (D^\alpha v)(x) = 0 \quad \forall x \in B_a \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d \quad \text{satisfying} \quad |\alpha| = k+1$$

となるので，補題 80 より，$\rho_\varepsilon * v$ は $B_a$ 上で $k$ 次多項式になる．また，[22, p.146, 問題 6 の 4 i)] より，

$$\rho_\varepsilon * v \longrightarrow v \quad \text{in} \quad L^2(B_a) \quad (\varepsilon \longrightarrow +0)$$

が成り立つ．$P_k$ は有限次元であるから，$L^1(B_a)$ における閉部分空間になるので，$v$ は $B_a$ 上で $k$ 次多項式でなくてはならない．■

---

[27] 作用素 $\rho_\varepsilon *$ は Friedrichs の軟化作用素 (mollifier) と呼ばれる．

# 7 Poisson 方程式に対する有限要素法の誤差評価

有界領域 $\Omega$ $(\subset \mathbb{R}^d)$ は，多角形領域 $(d=2)$ または多面体領域 $(d=3)$ とし[28]，その境界は Lipschitz 境界であるものとする．Poisson 方程式の斉次 Dirichlet 境界値問題：

$$(138)\quad \begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \quad u &= 0 \quad \text{on} \quad \Gamma := \partial\Omega \end{cases}$$

を考える．弱形式は次のように定式化される：

$$(139)\quad \begin{cases} \text{Find } u \in V \text{ such that} \\ a(u,\, v) = (f,\, v) \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

ここで，

$$\begin{aligned} V &:= \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ on } \Gamma \right\}, \\ a(u,\, v) &:= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \\ (f,\, v) &:= \int_\Omega f v \, dx. \end{aligned}$$

ここで，$V$ の定義式の右辺は $H_0^1(\Omega)$ と書かれることもある．任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対して，問題 (139) が唯一つ解を持つことは，定理 74 から分かる．

問題 (139) の有限要素解に対する事前誤差評価を導出するために，$\Omega$ の三角形分割 $(d=2)$（または四面体分割 $(d=3)$）の族 $\{\mathcal{T}_h\}_{0<h<\bar{h}}$ $(\bar{h}<1)$ を考える．この族は，次の条件を満たすものとする．

i) $\overline{\Omega} = \displaystyle\bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \overline{K} \quad \forall h \in (0,\, \bar{h}].$

ii) $\mathcal{T}_h$ の異なる要素 $K, K'$ に対しては，$K \cap K' = \emptyset$. ここで，$K$ は辺を含まない開集合と考えている．

iii) 各要素の辺は他の要素の辺に一致するか，$\Gamma$ の部分集合になる．

iv) 各 $K \in \mathcal{T}_h$ に対して，$h_K$ を $K$ の直径（最大辺長），$\rho_K$ を $K$ の内接円 (球) の半径とする時，

$$(140)\quad h_K \le h \quad \forall h \in (0,\, \bar{h}], \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$$

が成り立ち，さらに，ある正定数 $\sigma$ が存在して，

$$(141)\quad \frac{h_K}{\rho_K} \le \sigma \quad \forall h \in (0,\, \bar{h}], \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$$

が成り立つ．ここで，$\sigma$ は $h$ と $K$ に依らない．

条件 i)–iv) を満たす $\{\mathcal{T}_h\}_{h\in(0,\,\bar{h}]}$ を正則な三角形分割の族と呼ぶ[29].

各三角形分割 $\mathcal{T}_h$ $(h \in (0,\, \bar{h}])$ に対して，$P_k$ 要素 $(k \ge 1)$ を用いることを考え，次の関数空間を導入する．

$$\begin{aligned} W_h &:= \left\{ w_h \in C^0(\overline{\Omega}) \mid \ w_h|_K \in P_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}, \\ (142)\quad V_h &:= \left\{ v_h \in W_h \mid v_h = 0 \text{ on } \Gamma \right\}. \end{aligned}$$

問題 (139) の離散近似問題を次のように設定する．

$$(143)\quad \begin{cases} \text{Find } u_h \in V_h \text{ such that} \\ a(u_h,\, v_h) = (f,\, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases}$$

離散近似問題 (143) の解 $u_h$，すなわち，有限要素解は一意的に存在する．実際，$V_h \subset V$ であり[30]，$\dim V_h < \infty$ なので，$V_h$ は $a(\cdot,\,\cdot)$ を内積とする Hilbert 空間になるので，Riesz の表現定理から (143) の一意可解性を示すことができる．また，離散近似問題 (143) に付随する行列 $A$ が正定値対称行列であることを，註記 4 と同様に示すことできるので，このことからも，離散近似問題 (143) の解は一意的に存在することが分かる．

---

[28] $d$ 次元多面体の定義については，例えば，[27, p.82] を見よ．

[29] $d=3$ の時の四面体分割に対しても，区別せずに，三角形分割と呼ぶことにする．$d$ 単体分割という呼び方もあるようである [3].

[30] 命題 65，命題 48 を参照せよ．

**註記 81** 第 2.3 節で与えた離散近似問題 (46) は，斉次 Dirichlet 境界値問題 (138) の場合，

$$(144)\quad \begin{cases} \text{Find } \hat{u}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{N'} u_j\varphi_j(\boldsymbol{x}) \text{ such that} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla\hat{u}\cdot\nabla v\,d\boldsymbol{x} = \int_\Omega fv\,d\boldsymbol{x} \qquad v = \varphi_i \quad (1 \le \forall i \le N') \end{cases}$$

と書けるが，(143) と (144) は同値である．実際，$V_h = \mathrm{span}\{\varphi_i \,|\, 1 \le i \le N'\}$ であることから，(143) の解が (144) を満たすことは明らか．

逆を示す．任意の $v_h \in V_h$ は，

$$(145)\quad v_h = \sum_{i=1}^{N'} c_i\varphi_i \quad c_i \in \mathbb{R} \quad (1 \le i \le N')$$

と書ける．一方，(144) の解を $\hat{u}$ とすると，

$$\sum_{i=1}^{N'} c_i \int_\Omega \nabla\hat{u}\cdot\nabla\varphi_i\,d\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{N'} c_i \int_\Omega f\varphi_i\,d\boldsymbol{x}$$

が成り立つ．これは，(145) より，

$$\int_\Omega \nabla\hat{u}\cdot\nabla v_h\,d\boldsymbol{x} = \int_\Omega fv_h\,d\boldsymbol{x}$$

であるので，$\hat{u}$ が (143) を満たすことが分かる．

## 7.1 有限要素解の最適性

**命題 82 (Galerkin 直交性)** 問題 (139) と問題 (143) の解をそれぞれ $u$ と $u_h$ とする．この時，

$$(146)\quad a(u-u_h,\, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

が成り立つ．すなわち，$u_h$ は $u$ の内積 $a(\cdot,\,\cdot)$ に関する $V_h$ への直交射影となる．

**証明．** 任意の $v_h \in V_h$ に対して，

$$\begin{aligned} (147)\, a(u,\, v_h) &= (f,\, v_h) \\ (148)\, a(u,\, v_h) &= (f,\, v_h) \end{aligned}$$

が成り立つ．(147) から (147) を引くと，(146) が得られる． ■

**定理 83 (有限要素解の最適性)** 問題 (139) と問題 (143) の解をそれぞれ $u$ と $u_h$ とする．この時，

$$(149)\quad |u-u_h|_{1,\Omega} \le |u-v_h|_{1,\Omega} \quad \forall v_h \in V_h$$

が成り立つ．

**証明．** $|\cdot|_{1,\Omega}$ が $a(\cdot,\,\cdot)$ に付随するノルムであるので，命題 82 から明らか． ■

## 7.2 補間誤差評価

解 $u$ と有限要素解 $u_h$ との間の $H^1$ セミノルムによる誤差 $|u-u_h|_{1,\Omega}$ の事前誤差評価式の導出するには，不等式 (149) の右辺の $v_h$ を解 $u$ の補間関数 $\mathcal{I}_h u\ (\in V_h)$ として，定理 101 で導出する $|u-\mathcal{I}_h u|_{1,\Omega}$ の誤差評価式を用いる（定理 102 参照）．

**補題 84** 任意の $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ と任意の $v \in H^k(\Omega)$ [31]に対して，ある唯一つの $p \in P_k$ が存在して，

$$\int_\Omega D^\alpha (v-p)\,dx = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d \quad \text{satisfying} \quad |\alpha| \le k. \tag{150}$$

**証明．** マルチインデックス $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ に対して，

$$x^\beta = x_1^{\beta_1} \cdots x_d^{\beta_d}$$

とする．$\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ に対して，ある $1 \le j \le d$ が存在して，$\alpha_j > \beta_j$ となる時，$D^\alpha x^\beta = 0$ となることに注意する．すると，$|\alpha| > |\beta|$ の時は，

$$D^\alpha x^\beta = 0 \tag{151}$$

となり，また，$|\alpha| = |\beta|$ の時は，

$$D^\alpha x^\beta = \begin{cases} \alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_d! & \text{if } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{if } \alpha \ne \beta \end{cases} \tag{152}$$

となることが分かる．

今，$p = \sum_{|\beta| \le k} c_\beta x^\beta$ とおく．ただし，$c_\beta$ は未定係数である．これが与えられた $v \in H^k(\Omega)$ に対して，(150) を満たすためには，

$$\sum_{|\beta| \le k} \int_\Omega D^\alpha x^\beta \, dx c_\beta = \int_\Omega D^\alpha v \, dx \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d \quad \text{satisfying} \quad |\alpha| \le k \tag{153}$$

が満たされなければならない．これは，(151), (152) によって，次のようになる：

$$\alpha! \, |\Omega| \, c_\alpha + \sum_{|\alpha| < |\beta| \le k} \int_\Omega D^\alpha x^\beta \, dx c_\beta = \int_\Omega D^\alpha v \, dx \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d \quad \text{satisfying} \quad |\alpha| \le k \tag{154}$$

ここで，$|\alpha| \le k$ を満たす $N$ 個のマルチインデックスに，次のように番号をつける：

$$\begin{array}{lcl}
0\,\text{次} & \alpha^{(1)} := (0, \ldots, 0) & 1 = {}_dH_0\,\text{個} \\
1\,\text{次} & \left\{\begin{array}{rcl} \alpha^{(2)} & := & (1, 0, \ldots, 0) \\ \alpha^{(3)} & := & (0, 1, \ldots, 0) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha^{(d+1)} & := & (0, 0, \ldots, 1) \end{array}\right\} & d = {}_dH_1\,\text{個} \\
2\,\text{次} & \left\{\begin{array}{rcl} \alpha^{(d+2)} & := & (\cdots\cdots\cdots) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{array}\right\} & {}_dH_2\,\text{個} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
k\,\text{次} & \left\{\begin{array}{rcl} \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha^{(N)} & := & (\cdots\cdots\cdots) \end{array}\right\} & {}_dH_k\,\text{個}
\end{array}$$

ここで，${}_dH_l$ は多重集合係数（重複組み合わせ）：${}_dH_l = {}_{d-1+l}C_l$ であり，

$$N := {}_{d+1}H_k = \sum_{l=0}^{k} {}_dH_l$$

---

[31] $v \in W^{k,1}(\Omega)$ で良い．

である[32]．このようにマルチインデックスの番号付けして，連立１次方程式 (153) の各方程式を

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N}\int_\Omega D^{\alpha^{(1)}}x^{\alpha^{(j)}}\,dx c_{\alpha^{(j)}} &= \int_\Omega D^{\alpha^{(1)}}v\,dx\\
\sum_{j=1}^{N}\int_\Omega D^{\alpha^{(2)}}x^{\alpha^{(j)}}\,dx c_{\alpha^{(j)}} &= \int_\Omega D^{\alpha^{(2)}}v\,dx\\
\vdots\quad &\quad \vdots\\
\sum_{j=1}^{N}\int_\Omega D^{\alpha^{(N)}}x^{\alpha^{(j)}}\,dx c_{\alpha^{(j)}} &= \int_\Omega D^{\alpha^{(N)}}v\,dx
\end{aligned}$$

と並べると，未定係数 $[c_{\alpha^{(1)}},\ldots,c_{\alpha^{(N)}}]$ の満たすべき連立１次方程式 (154) の係数行列は、次のような対角成分が $\alpha^{(j)}!|\Omega|$ となる上三角形行列になる：

$$\begin{bmatrix}
\boxed{|\Omega|} & * & * & * & * \\
0 & \boxed{\begin{matrix}|\Omega| & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & |\Omega|\end{matrix}} & * & * & * \\
 & & \ddots & * & * \\
 & & & \ddots & * \\
\mathbf{0} & & & & \boxed{\begin{matrix}\alpha^{(n)}!|\Omega| & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & \alpha^{(N)}!|\Omega|\end{matrix}}
\end{bmatrix}. \tag{155}$$

ここで，$n = N - {}_dH_k + 1$ である．故に，未定係数 $[c_{\alpha^{(1)}},\ldots,c_{\alpha^{(N)}}]$ が一意的に定まることが分かる．例えば，$d = 2$, $k = 2$ の時には，係数行列 (155) は

$$\begin{bmatrix}
0!0!\,|\Omega| & \int_\Omega x & \int_\Omega y & \int_\Omega x^2 & \int_\Omega xy & \int_\Omega y^2\\
0 & 1!0!\,|\Omega| & 0 & \int_\Omega 2x & \int_\Omega y & 0\\
0 & 0 & 0!1!\,|\Omega| & 0 & \int_\Omega x & \int_\Omega 2y\\
0 & 0 & 0 & 2!0!\,|\Omega| & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1!1!\,|\Omega| & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0!2!\,|\Omega|
\end{bmatrix}$$

となる． ■

**補題 85 (Théorème 1.5, Chap. 1 in Nečas [18])** 有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ の境界は $C^0$ 級であるとする．任意の $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して，ある正定数 $C$ が存在して，

$$\|v\|_{k+1,\Omega} \le C\left(|v|_{k+1,\Omega}^2 + \sum_{|\alpha|\le k}\left|\int_\Omega D^\alpha v\,dx\right|^2\right)^{1/2} \qquad \forall v \in H^{k+1}(\Omega) \tag{156}$$

が成り立つ．ここで，$C$ は $v \in H^{k+1}(\Omega)$ には依らない．

**証明．** 補題 73 の証明法と同様の方法である．

---

[32] ${}_{d+1}H_k = \sum_{l=0}^{k} {}_dH_l$ は，漸化式

$${}_dH_l = {}_dH_{l-1} + {}_{d-1}H_l \quad \forall d, \forall l \in \mathbb{N}$$

が成り立つことから証明できる．ただし，${}_0H_l = 0$ $(\forall l \in \mathbb{N})$ とする．

背理法で示す．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，ある $v_n \in H^{k+1}(\Omega)$ が存在して，$\|v_n\|_{k+1,\Omega} = 1$ かつ

$$(157)\ \ 1 > n\left(|v_n|_{k+1,\Omega}^2 + \sum_{|\alpha|\le k}\left|\int_\Omega D^\alpha v_n\,dx\right|^2\right)^{1/2}$$

が成立すると仮定する．

この時，定理 79 より，ある部分列 $\{v_{n_l}\} \subset \{v_n\}$ が存在して，$H^k(\Omega)$ で収束列となる．すなわち，

$$(158)\ \ v_{n_l} \longrightarrow v \quad \text{in} \quad H^k(\Omega) \quad (l \longrightarrow \infty).$$

不等式 (157) より，

$$(159)\ \ |v_n|_{k+1,\Omega} \le 1/n$$

であることを合わせせると，$\{v_{n_l}\}$ は $H^{k+1}(\Omega)$ における Cauchy 列となる．よって，$v_{n_l} \longrightarrow v$ in $H^{k+1}(\Omega)$ $(l \longrightarrow \infty)$．この時，式 (159) より，

$$D^\alpha v = 0 \quad \forall\alpha \text{ satisfying } |\alpha| = k+1$$

でなくてはならない．よって，補題 78 より，$v \in P_k$ となる．

式 (158) より，

$$(160)\ \ \int_\Omega D^\alpha v_{n_l}\,dx \longrightarrow \int_\Omega D^\alpha v\,dx \quad (l \longrightarrow \infty) \quad \forall\alpha \quad \text{satisfying} \quad |\alpha| \le k.$$

一方，式 (157) より，

$$(161)\ \ \int_\Omega D^\alpha v_{n_l}\,dx \longrightarrow 0 \quad (l \longrightarrow \infty) \quad \forall\alpha \quad \text{satisfying} \quad |\alpha| \le k.$$

式 (160), (161) より，

$$(162)\ \ \int_\Omega D^\alpha v\,dx = 0 \quad \forall\alpha \quad \text{satisfying} \quad |\alpha| \le k.$$

ここで，$v \in P_k$ であることを考慮すると，補題 84 より，$v \equiv 0$ となることが分かる．すると，$1 = \lim_{l\longrightarrow\infty} \|v_{n_l}\|_{k+1,\Omega} = \|v\|_{k+1,\Omega} = 0$ となり，矛盾が生ずる．■

**定理 86 (Deny–Lions の補題 [28])** 有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ の境界は $C^0$ 級であるとする．任意の $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して，ある正定数 $C$ が存在して，

$$\|v - p_v\|_{k+1,\Omega} \le C|v|_{k+1,\Omega} \quad \forall v \in H^{k+1}(\Omega)$$

が成り立つ．ここで，$p_v$ は $v$ から (150) を満たすように一意的に定まる $k$ 次多項式である．また，$C$ は $v \in H^{k+1}(\Omega)$ には依らない．

**証明．** 任意の $v \in H^{k+1}(\Omega)$ に対して，(150) を満たす $p_v \in P_k$ をとる．(156) より，

$$\begin{aligned}\|v - p_v\|_{k+1,\Omega} &\le C\left\{|v - p_v|_{k+1,\Omega}^2 + \sum_{|\alpha|\le k}\left|\int_\Omega D^\alpha(v - p_v)\,dx\right|^2\right\}\\ &= C|v|_{k+1,\Omega}^2.\end{aligned}$$ ■

定理 86 より，次の系を得ることができる．

**系 87** 有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ の境界は $C^0$ 級であるとする．任意の $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して，商空間 $H^{k+1}(\Omega)/P_k$ のノルム：

$$|||[v]||| := \inf_{p\in P_k} \|v + p\|_{k+1,\Omega}$$

とノルム：

$$||||[v]|||| := |v|_{k+1,\Omega}$$

は互いに同値である．ここで，商空間の元を $[v]$ $(v \in H^{k+1}(\Omega))$ と書いている．

ここで，有名な Branmble–Hilbert の補題を紹介する．

**補題 88 (Bramble–Hilbert の補題 [29])** 有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ の境界は $C^0$ 級であるとする．$Y$ をノルム空間とする．$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し，$L \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\Omega), Y)$ とし，$P_k \subset \mathrm{Ker}(L)$ が成立するとする．この時，ある正定数 $C$ が存在して，

(163) $\|Lv\|_Y \leq C|v|_{k+1,\Omega}$

が成り立つ．ここで，$C$ は $v \in H^{k+1}(\Omega)$ には依らない．

**証明**．任意の $v \in H^{k+1}(\Omega)$ に対して，(150) を満たす $k$ 次多項式を $p_v$ とする．

$$\begin{aligned}\|Lv\|_Y &= \|L(v-p_v)\|_Y \quad \text{（}P_k \subset \mathrm{Ker}(L)\text{ による）} \\ &\leq \|L\|\|v-p_v\|_{k+1,\Omega} \quad \text{（}L \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\Omega), Y)\text{ による）} \\ &\leq C|v|_{k+1,\Omega} \quad \text{（定理 86 による）．} \blacksquare\end{aligned}$$

**註記 89** 定理 86 を Bramble–Hilbert の補題と呼ぶこともある．定理 86 は [30, 第 3 章] で Deny–Lions の補題と呼ばれているので，ここでは，それに従った．

**定理 90 (Sobolev の埋め込み定理)** 有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ の境界は Lipschitz であるとする．$k+1 > d/2$ に対して，

(164) $H^{k+1}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$

であり，さらに，

(165) $\|v\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq C\|v\|_{k+1,\Omega} \quad \forall v \in H^{k+1}(\Omega)$

が成り立つ．ここで，$C$ は $v$ に依らない正定数である．

**証明**．Nečas [18, Chap. 2, Théorème 3.8], Grisvard [20, p.27] を見よ． $\blacksquare$

**註記 91 ([13] からの引用)** $H^1(\Omega)$ の元が必ずしも $C^0(\overline{\Omega})$ の元とはならないことを例示する．領域 $\Omega$ を

$$\Omega := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid |\boldsymbol{x}| < 1\right\}$$

とする．$d = 2$ の時，

$$u = \log\log\frac{2}{r},$$

$d \geq 3$ の時，

$$u = r^{-\alpha} \quad \left(\alpha < \frac{d-2}{2}\right)$$

とする．この時，$u \in H^1(\Omega)$ であるが，$u \notin C^0(\overline{\Omega})$ となる．

### 7.2.1 参照要素での補間誤差評価

図 56 の三角形 $\widehat{K}$ を参照三角形または参照要素と呼ぶ．$d = 3$ の時の参照四面体，$d \geq 4$ の時の参照 $d$ 単体も同様に考えることができる．

まず，$\widehat{K}$ 上の $k$ 次 Lagrange 補間作用素 $\widehat{\mathcal{I}}\colon C^0(\overline{\widehat{K}}) \longrightarrow P_k(\widehat{K})$ $(k \geq 1)$ を

$$\widehat{\mathcal{I}}v := \sum_{\boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{B}_k} v(\widehat{\boldsymbol{Q}}^{\boldsymbol{\beta}})\hat{\phi}_{\boldsymbol{\beta}} \quad \forall v \in C^0(\overline{\widehat{K}})$$

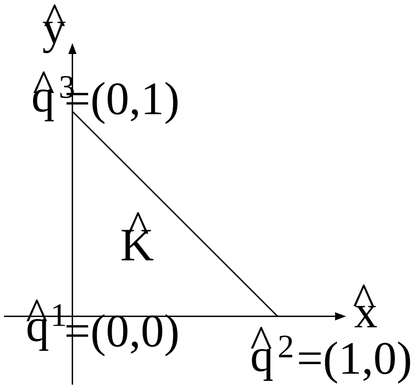


図 56: 参照三角形 $\widehat{K}$.

で定義する．ここで，$\hat{\phi}_{\boldsymbol{\beta}}$ は

$$\hat{\phi}_{\boldsymbol{\beta}}(\widehat{\boldsymbol{Q}}^{\boldsymbol{\beta}'}) = \prod_{j=1}^{d+1} \delta_{\beta_j \beta'_j} =: \delta_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}'} \quad \forall \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}' \in \mathfrak{B}_k$$

を満たす $k$ 次多項式である．$\widehat{\mathcal{I}}v$ は $v$ の $k$ 次 Lagrange 補間関数と呼ばれる．

今，$l+1 > d/2$ となる整数 $l$ に対しては，定理 90 より，$H^{l+1}(\widehat{K})$ に属する関数 $v$ は $C^0(\overline{\widehat{K}})$ とみなせるので，$\overline{\widehat{K}}$ 上の各点での $v$ の値を考えることができる．よって，$v \in H^{l+1}(\widehat{K})$ に補間作用素 $\widehat{\mathcal{I}}$ を作用させることができる．

**定理 92** 任意の整数 $l \in (d/2-1, k]$ に対して，ある正定数 $C$ が存在して，

(166) $\left\| v - \widehat{\mathcal{I}}v \right\|_{l+1,\widehat{K}} \leq C\,|v|_{l+1,\widehat{K}} \quad \forall v \in H^{l+1}(\widehat{K})$

が成り立つ．ここで，$C$ は $k, l, \widehat{K}$ には依存するが，$v$ には独立である．

**証明．** Bramble–Hilbert の補題 (補題 88) を用いて，証明する．

補題 88 において，$\Omega := \widehat{K}$，$k := l$, $Y := H^{l+1}(\widehat{K})$, $L := I_d - \widehat{\mathcal{I}}$ とする．ここで，$I_d$ は恒等写像である．この時，補題 88 の仮定が満たされることをチェックする．

$I_d - \widehat{\mathcal{I}} \in \mathcal{L}(H^{l+1}(\widehat{K}), H^{l+1}(\widehat{K}))$ を示すためには，

(167) $\widehat{\mathcal{I}} \in \mathcal{L}(H^{l+1}(\widehat{K}), H^{l+1}(\widehat{K}))$

を示せば十分なので，これを示す．任意の $v \in H^{l+1}(\widehat{K})$ に対して，

$$\begin{aligned}
\left\| \widehat{\mathcal{I}}v \right\|_{l+1,\widehat{K}} &\leq \sum_{\boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{B}_k} \left| v(\widehat{\boldsymbol{Q}}^{\boldsymbol{\beta}}) \right| \left\| \hat{\phi}_{\boldsymbol{\beta}} \right\|_{l+1,\widehat{K}} \\
&\leq \sum_{\boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{B}_k} \|v\|_{C^0(\overline{\widehat{K}})} \left\| \hat{\phi}_{\boldsymbol{\beta}} \right\|_{l+1,\widehat{K}} \\
&\leq C \left( \sum_{\boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{B}_k} \left\| \hat{\phi}_{\boldsymbol{\beta}} \right\|_{l+1,\widehat{K}} \right) \|v\|_{l+1,\widehat{K}} \quad (\text{定理 90 より}) \\
&=: C\,\|v\|_{l+1,\widehat{K}}.
\end{aligned}$$

ここで，$C$ は $v$ に依らない正定数である．よって，(167) が示された．また，

(168) $P_l \subset \mathrm{Ker}(I_d - \widehat{\mathcal{I}})$

であることは，$l \leq k$ であることから明らか．(168), (167) より，補題 88 を用いると，(166) が得られる． ■

### 7.2.2 一般要素での補間誤差評価

一般の三角形 $K$ について考える．参照三角形 $\widehat{K}$ から三角形 $K$ への affine 写像 $\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{F}(\widehat{\boldsymbol{q}^j}) = \boldsymbol{q}^j$ $(1 \le j \le 3)$ を満たすように一意的に定めることができる．すなわち，$\boldsymbol{q}^j = (x^j, y^j)$ $(1 \le j \le 3)$ とした時,

$$(169)\ \boldsymbol{F}(\widehat{\boldsymbol{x}}) = B \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \boldsymbol{b} \quad \text{with} \quad B := \begin{bmatrix} x^2 - x^1 & x^3 - x^1 \\ y^2 - y^1 & y^3 - y^1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} := \begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$$

と書ける．次が成り立つことに注意する: 任意の $\boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{B}_k$ に対して,

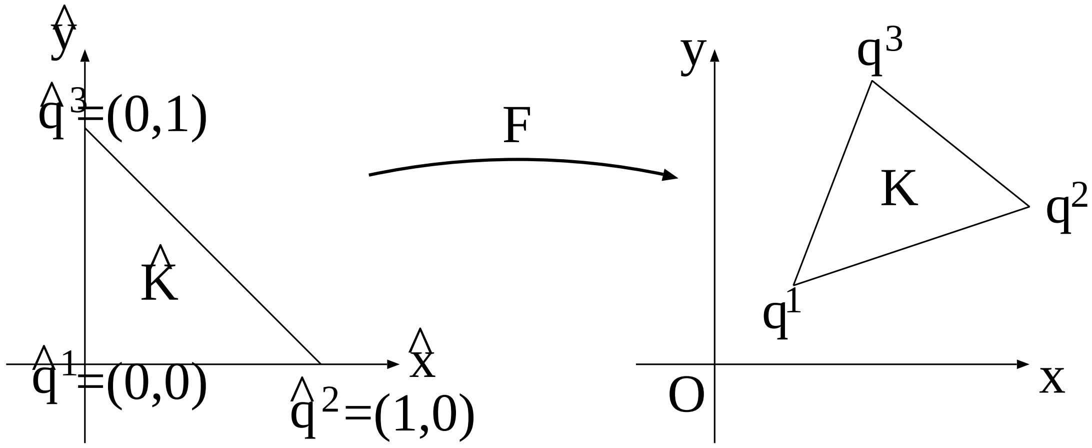


図 57: 参照三角形 $\widehat{K}$ から三角形 $K$ への affine 写像.

$$(170)\ \boldsymbol{F}(\widehat{\boldsymbol{Q}}^{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\beta}},$$

$$(171)\ \phi_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x}) = \widehat{\phi}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{x})) \quad \forall \boldsymbol{x} \in K.$$

ここで，$\phi_{\boldsymbol{\beta}}$ は,

$$\phi_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{\beta}'}) = \delta_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}'} \quad \forall \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}' \in \mathfrak{B}_k$$

を満たす $k$ 次多項式である．

**演習問題 93** (170), (171) を示せ．

一般の三角形要素 $K$ 上での $k$ 次 Lagrange 補間作用素 $\mathcal{I} : C^0(\overline{K}) \longrightarrow P_k(K)$ を

$$(172)\ \mathcal{I}v := \sum_{\boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{B}_k} v(\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{\beta}}) \phi_{\boldsymbol{\beta}}$$

で定義する．この時，任意の $v \in C^0(\overline{K})$ に対して,

$$(173)\ \widehat{\mathcal{I}v}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \left(\widehat{\mathcal{I}}\hat{v}\right)(\hat{\boldsymbol{x}}) \quad \forall \hat{\boldsymbol{x}} \in \overline{\widehat{K}}$$

が成り立つ．ここで，$\hat{v} := v \circ \boldsymbol{F}$ である．

**演習問題 94** (173) を示せ．

**補題 95** affine 写像 (169) の行列 $B$ に対して,

$$(174)\ \|B\| \le \frac{h_K}{\hat{\rho}},$$

$$(175)\ \left\|B^{-1}\right\| \le \frac{\hat{h}}{\rho_K}$$

が成立する．ここで，$\hat{h}$ および $\hat{\rho}$ はそれぞれ参照三角形 $\widehat{K}$ の直径および内接球の半径であり，$\|B\|$ は $B$ の作用素ノルム：

$$(176)\quad \|B\| := \sup_{\|\hat{\boldsymbol{x}}\|_{\mathbb{R}^d} \le 1} \|B\hat{\boldsymbol{x}}\|_{\mathbb{R}^d}$$

である．

**証明．** 参照要素 $\widehat{K}$ の内接球の中心を $\hat{\boldsymbol{x}}^0$ とする．任意の $\hat{\boldsymbol{\xi}} \in \mathbb{R}^d$ で

$$(177)\quad \|\hat{\boldsymbol{\xi}}\|_{\mathbb{R}^d} \le \hat{\rho}$$

を満たすものに対して，$\hat{\boldsymbol{\xi}} + \hat{\boldsymbol{x}}^0 \in \overline{\widehat{K}}$ である．よって，$\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{\xi}} + \hat{\boldsymbol{x}}^0) \in \overline{K}$．また当然，$\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{x}}^0) \in \overline{K}$．これらのことから，

$$(178)\quad \|B\hat{\boldsymbol{\xi}}\|_{\mathbb{R}^d} = \|\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{\xi}} + \hat{\boldsymbol{x}}^0) - \boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{x}}^0)\|_{\mathbb{R}^d} \le h_K$$

が成り立つ．(177), (178) から，(174) が成立することが分かる．同様にして，(175) が成立することも分かる． ■

**補題 96** $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in (0,\bar{h}]}$ を正則な三角形分割の族とする．この時，任意の $h \in (0, \bar{h}]$ と任意の $K \in \mathcal{T}_h$ に対して，

$$\begin{array}{lrcl}
(179) & |\det B| & \le & h_K^d, \\
(180) & \left|\det B^{-1}\right| & \le & C_1 h_K^{-d}, \\
(181) & |[B]_{i,j}| & \le & h_K \quad (1 \le i,\, j \le d) \quad ([B]_{i,j}\ \text{は}\ B\ \text{の}\ (i,\, j)\ \text{成分}), \\
(182) & \left|\left[B^{-1}\right]_{i,j}\right| & \le & C_2 h_K^{-1} \quad (1 \le i,\, j \le d) \quad (\left[B^{-1}\right]_{i,j}\ \text{は}\ B^{-1}\ \text{の}\ (i,\, j)\ \text{成分}),
\end{array}$$

が成り立つ．ここで，$C_1, C_2$ は $h$ と $K$ には依らないある正定数である．

**証明．** *Step* 1.

$$|\det B| = \frac{|K|}{|\widehat{K}|}$$

より，(179) は明らか．

*Step* 2. まず，行列式の定義式[33]より，

$$(183)\quad \left|\det B^{-1}\right| \le d!\left\|B^{-1}\right\|_\infty^d$$

となる．ここで，

$$\left\|B^{-1}\right\|_\infty := \max_{1 \le i,j \le d} \left|\left[B^{-1}\right]_{i,j}\right|.$$

式 (176) で定義した作用素ノルム $\|\cdot\|$ と $\|\cdot\|_\infty$ は有限次元空間 $\mathbb{R}^{d^2}$ 上のノルムなので，互いに同値であるので，ある正定数 $C$ が存在して，

$$(184)\quad \left\|B^{-1}\right\|_\infty \le C\left\|B^{-1}\right\|$$

が成り立つ．ここで，$C$ は $B^{-1}$ に依らない．よって，

$$\begin{array}{rcll}
\left|\det B^{-1}\right| & \le & C\left\|B^{-1}\right\|^d & ((183), (184)\ \text{による}) \\
& \le & C\left(\dfrac{\hat{h}}{\rho_K}\right)^d & ((175)\ \text{による}) \\
& \le & C\left(\dfrac{\hat{h}\sigma}{h_K}\right)^d =: C h_K^{-d} & ((141)\ \text{による})
\end{array}$$

---

[33] $\det B := \sum_{\sigma \in S_d} [B]_{1,\sigma(1)} \cdots [B]_{d,\sigma(d)}$

ここで，$C$ は $K, h$ に依らない正定数である．

*Step* 3. (169) から (181) が成り立つことは明らか．例えば，

$$|[B]_{1,1}| = |x^2 - x^1| \le \|\boldsymbol{q}^2 - \boldsymbol{q}^1\|_{\mathbb{R}^2} \le h_K$$

となるからである．

*Step* 4.

$$\begin{aligned}\left|\left[B^{-1}\right]_{i,j}\right| &\le \left\|B^{-1}\right\|_\infty \\ &\le C\left\|B^{-1}\right\| \quad \text{((184) による)} \\ &\le C\left(\frac{\hat{h}}{\rho_K}\right) \quad \text{((175) による)} \\ &\le C\left(\frac{\hat{h}\sigma}{h_K}\right) =: Ch_K^{-1} \quad \text{((141) による)}\end{aligned}$$

ここで，$C$ は $K, h$ に依らない正定数である．これより，(182) を得ることができる． ■

**補題 97** $\{\mathcal{T}_h\}_{h\in(0,\bar{h}]}$ を正則な三角形分割の族とする．この時，任意の $h \in (0, \bar{h}]$，任意の $T \in \mathcal{T}_h$，任意の $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して，以下が成り立つ：

i) 任意の $v \in H^m(K)$ に対し，$\hat{v} := v \circ F \in H^m(\widehat{K})$ であり，

(185) $|\hat{v}|_{m,\widehat{K}} \le Ch_K^{m-d/2}\,|v|_{m,K}$.

ここで，$C$ は $K, h, v$ に依らない正定数である．

ii) 任意の $\hat{v} \in H^m(\widehat{K})$ に対し，$v := \hat{v} \circ F^{-1} \in H^m(K)$ であり，

(186) $|v|_{m,K} \le Ch_K^{-m+d/2}\,|\hat{v}|_{m,\widehat{K}}$.

ここで，$C$ は $K, h, \hat{v}$ に依らない正定数である．

**証明**．前半・後半ともに証明方法は同じなので，前半のみを示す．

任意の $v \in H^m(K)$ に対し，$\hat{v} := v \circ F$ とする．まず

$$|\hat{v}|^2_{m,\widehat{K}} = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\widehat{K}} \left|\widehat{D}^\alpha \hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}})\right|^2 d\hat{\boldsymbol{x}} \quad \left(\widehat{D}^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \hat{x}_1^{\alpha_1}\cdots\partial\hat{x}_d^{\alpha_d}}\right)$$

であり，各 $\alpha$ ($|\alpha| = m$) に対して，ある $j_1, \ldots, j_m \in \{1, \ldots, d\}$ が存在して，

$$\widehat{D}^\alpha \hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \frac{\partial^m \hat{v}}{\partial\hat{x}_{j_1}\cdots\partial\hat{x}_{j_m}}(\hat{\boldsymbol{x}})$$

となることに注意する．ここで，$\hat{v}$ と $v$ との間の合成関数の微分公式：

$$\begin{aligned}\text{(187)}\ \frac{\partial^m \hat{v}}{\partial\hat{x}_{j_1}\cdots\partial\hat{x}_{j_m}}(\hat{\boldsymbol{x}}) &= \sum_{k_1=1}^{d}\cdots\sum_{k_m=1}^{d} \frac{\partial x_{k_1}}{\partial\hat{x}_{j_1}}\cdots\frac{\partial x_{k_m}}{\partial\hat{x}_{j_m}}\frac{\partial^m v}{\partial x_{k_1}\cdots\partial x_{k_m}}(\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{x}})) \\ &\equiv \sum_{k_1=1}^{d}\cdots\sum_{k_m=1}^{d} b_{k_1,j_1}\cdots b_{k_m,j_m}\frac{\partial^m v}{\partial x_{k_1}\cdots\partial x_{k_m}}(\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{x}}))\end{aligned}$$

が（超関数微分の意味で）成り立つ．ここで，$b_{i,j} = [B]_{i,j}$ とした．よって，

$$\begin{aligned}&\left(\int_{\widehat{K}}\left|\widehat{D}^\alpha\hat{v}(\hat{x})\right|^2 d\hat{x}\right)^{1/2} \\ \le\ & \sum_{k_1=1}^{d}\cdots\sum_{k_m=1}^{d} |b_{k_1,j_1}|\cdots|b_{k_m,j_m}|\left|\det B^{-1}\right|^{1/2}\left(\int_K\left|\frac{\partial^m v}{\partial x_{k_1}\cdots\partial x_{k_m}}(\boldsymbol{x})\right|^2 d\boldsymbol{x}\right)^{1/2} \quad \text{((187) と三角不等式による)}. \\ \le\ & d^m h_K^m C_1^{1/2} h_K^{-d/2}|v|_{m,K} \quad \text{((181) と (180) による)}.\end{aligned}$$

これより，

$$|\hat{v}|_{m,\widehat{K}} \leq \sum_{|\alpha|=m} \left( \int_{\widehat{K}} \left| \widehat{D}^{\alpha} \hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}}) \right|^2 d\hat{\boldsymbol{x}} \right)^{1/2} \leq C h_K^{m-d/2} |v|_{m,K}. \quad \blacksquare$$

**詳記 98** 1次元の時には，(185), (186) は次のようになる．$\widehat{K} := (0,\, 1)$, $K := (0,\, h)$ とする．この時，$F(\hat{x}) = h\hat{x}$ であり，

$$\hat{v}(\hat{x}) = v \circ F(\hat{x}) = v(h\hat{x})$$

となり，

$$|\hat{v}|_{m,\widehat{K}} = h^{m-1/2}\, |v|_{m,K}$$

が成り立つ．実際，

$$\begin{aligned} |\hat{v}|^2_{m,\widehat{K}} &= \int_0^1 \left| \frac{d^m \hat{v}}{d\hat{x}^m}(\hat{x}) \right|^2 d\hat{x} \\ &= \int_0^1 \left| \frac{d^m v}{dx^m}(h\hat{x}) \right|^2 d\hat{x} \\ &= h^{2m} \int_0^h \left| \frac{d^m v}{dx^m}(x) h^m \right|^2 h^{-1} dx \\ &= h^{2m-1}\, |v|^2_{m,K}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**定理 99** $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in (0,\, \bar{h}]}$ を正則な三角形分割の族とする．任意の整数 $l \in (d/2-1,\, k]$ と任意の整数 $j \in [0,\, l+1]$ に対して，ある正定数 $C$ が存在して，

(188) $|v - \mathcal{I}v|_{j,K} \leq C h_K^{l+1-j} |v|_{l+1,K} \quad \forall v \in H^{l+1}(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall h \in (0,\, \bar{h}]$

が成り立つ．ここで，$C$ は $v$, $K$, $h$ には依らない．

**証明．** $\forall v \in H^{l+1}(K)$, $0 \leq \forall j \leq l+1$,

$$\begin{aligned} |v - \mathcal{I}v|_{j,K} &\leq C h_K^{-j+d/2} \left| \hat{v} - \widehat{\mathcal{I}v} \right|_{j,\widehat{K}} \quad \text{（(186) による）} \\ &= C h_K^{-j+d/2} \left| \hat{v} - \widehat{\mathcal{I}}\hat{v} \right|_{j,\widehat{K}} \quad \text{（(173) による）} \\ &\leq C h_K^{-j+d/2} \left\| \hat{v} - \widehat{\mathcal{I}}\hat{v} \right\|_{l+1,\widehat{K}} \quad \text{（$j \leq l+1$ による）} \\ &\leq C h_K^{-j+d/2}\, |\hat{v}|_{l+1,\widehat{K}} \quad \text{（定理 92 による）} \\ &\leq C h_K^{-j+d/2} h_K^{l+1-d/2}\, |v|_{l+1,K} \quad \text{（(185) による）} \\ &= C h_K^{l+1-j}\, |v|_{l+1,K}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 7.2.3 大域的な補間誤差評価

有界多面体領域 $\Omega$ の三角形分割 $\mathcal{T}_h$ に対して，大域的補間作用素 $\mathcal{I}_h : C^0(\overline{\Omega}) \longrightarrow W_h$ を

$$(\mathcal{I}_h v)|_K := \mathcal{I}_K\left(v|_K\right) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall v \in C^0(\overline{\Omega})$$

で定義する．ただし，$\mathcal{I}_K$ は (172) で定義した $K$ 上での $k$ 次 Lagrange 補間作用素である．

**詳記 100** 領域 $\Omega$ の境界 $\Gamma$ 上で $v = 0$ となる $v \in C^0(\overline{\Omega})$ に対しては，$\mathcal{I}_h v \in V_h$ となる．

**定理 101** $\{\mathcal{T}_h\}_{h\in(0,\bar{h}]}$ を正則な三角形分割の族とする．任意の整数 $l \in (d/2-1, k]$ と任意の $j \in \{0, 1\}$ に対して[34]，ある正定数 $C$ が存在して，

(189) $|v-\mathcal{I}_h v|_{j,\Omega} \le Ch^{l+1-j}|v|_{l+1,\Omega} \quad \forall v \in H^{l+1}(\Omega), \quad \forall h \in (0, \bar{h}]$

が成り立つ．ここで，$C$ は $v$ と $h$ には依らない．

**証明．** $\forall v \in H^{l+1}(\Omega), \forall j \in \{0, 1\}$,

$$\begin{aligned}|v-\mathcal{I}_h v|_{j,\Omega}^2 &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} |v-\mathcal{I}_K v|_{j,K}^2 \\ &\le C\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^{2(l+1-j)}|v|_{l+1,K}^2 \quad \text{（定理 99 による）} \\ &\le Ch^{2(l+1-j)}|v|_{l+1,\Omega}^2 \quad \text{((140): } h_K \le h \text{ による）.}\end{aligned}$$ ■

## 7.3 有限要素解の $H^1$ ノルムに関する事前誤差評価

**定理 102** 有界多面体領域 $\Omega$ の正則な三角形分割の族 $\{\mathcal{T}_h\}_{0<h<\bar{h}}$ を考える．$V_h$ は (142) によって定義される $P_k$ 要素 ($k \in \mathbb{N}, k > d/2-1$) による有限要素空間であるとする．問題 (139) の解 $u$ が $u \in H^{m+1}(\Omega)$ ($m > d/2-1$) を満たすものとする．問題 (143) の解を $u_h$ とする時，

(190) $|u-u_h|_{1,\Omega} \le Ch^l|u|_{l+1,\Omega}$

が成り立つ．ここで，$l := \min\{m, k\}$ であり，$C$ は $h$ と $u$ に依らない正定数である．

**証明．** (149) において，$v_h = \mathcal{I}_h u$ とおくと，

(191) $|u-u_h|_{1,\Omega} \le |u-\mathcal{I}_h u|_{1,\Omega}$.

定理 101 において，$l := \min\{m, k\}, j := 1$ とすると，

(192) $|u-\mathcal{I}_h u|_{1,\Omega} \le Ch^l|u|_{l+1,\Omega}$.

(191), (192) より，(190) を得ることができる． ■

## 7.4 有限要素解の $L^2$ ノルムに関する事前誤差評価

常套手段である Aubin–Nitsche のテクニックを用いて，有限要素解の $L^2$ ノルムに関する事前誤差評価を導出する．そのために，問題 (139) の解 $u$ の正則性に関する次の命題が必要である．

**命題 103** 領域 $\Omega$ は有界な凸多角形 (多面体) とする．任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対して，問題 (139) の解 $u$ は $H^2(\Omega)$ に属する．さらに，

(193) $\|u\|_{2,\Omega} \le C\|f\|_{0,\Omega}$

が成り立つ．ここで，$C$ は $f$ に依らない正定数である．

**証明．** Grisvard [21, Theorem 2.4.3, Corollary 2.6.8] を見よ． ■

**註記 104** 図 58 のような非有界扇形領域 $\Omega$ を考える．

$$U(r, \theta) := r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin\frac{\pi}{\omega}\theta$$

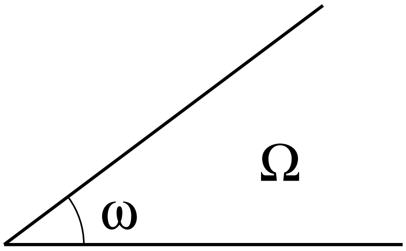


図 58: 角度 $\omega$ の非有界扇形領域 $\Omega$.

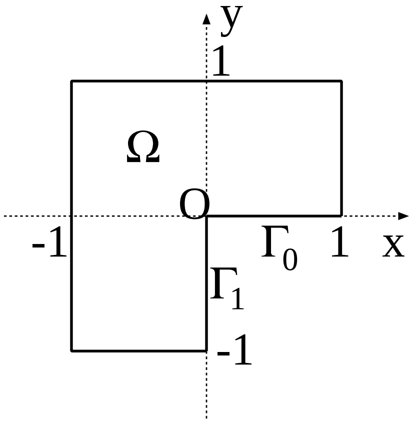


図 59: L 字型領域 $\Omega$．凸ではない．

は

$$\begin{aligned} -\Delta U &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ U &= 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

を満たす．また，$\omega > \pi$ の時には，$U \notin H^2(\Omega_R)$ となる．ここで，$\Omega_R := \Omega \cap \{r < R\}$ $(R > 0)$ である．

図 59 のような L 字型領域 $\Omega$ を考える．

$$U(r, \theta) := r^{2/3} \sin \frac{2}{3}\theta$$

は

$$\begin{aligned} -\Delta U &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ U &= 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \end{aligned}$$

を満たす．ここで，

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &:= \left\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1\right\}, \\ \Gamma_1 &:= \left\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < y < 0\right\}. \end{aligned}$$

今，$\chi \in C^\infty((0, \infty))$ で，

$$\chi(r) = \begin{cases} 1 & 0 < r < 1/3, \\ 0 & 2/3 < r \end{cases}$$

を満たすものを一つ固定する．ここで，

$$u(r, \theta) := \chi(r)U(r, \theta)$$

---

[34] $j = 0, 1$ とするのは，$v \in C^0(\overline{\Omega})$ に対し，$\mathcal{I}_h v \in H^1(\Omega)$ であるが，一般に $\mathcal{I}_h v \notin H^2(\Omega)$ であるからである（補題 64 参照）．

とすると，$u$ は $\Omega$ の境界で零になる．さらに $f := -\Delta u$ とすると，$u$ は斉次 Dirichlet 境界値問題 (138) の解となる．この時，$f \in L^2(\Omega)$ であり，また，$u \in H^1(\Omega) \wedge u \notin H^2(\Omega)$ となる．ゆえに，領域 $\Omega$ が凸でない時には，命題 103 は必ずしも成り立たないことが分かる．

**定理 105** 有界凸多角形領域 $\Omega$ の正則な三角形分割の族 $\{\mathcal{T}_h\}_{0<h<\bar{h}}$ を考える．$V_h$ は (142) によって定義される $P_k$ 要素 ($k \in \mathbb{N},\, k > d/2-1$) による有限要素空間であるとする．問題 (139) の解 $u$ が $u \in H^{m+1}(\Omega)$ ($m > d/2-1$) を満たすものとする．問題 (143) の解を $u_h$ とする時，

$$(194)\quad \|u-u_h\|_{0,\Omega} \le Ch^{l+1}|u|_{l+1,\Omega}$$

が成り立つ．ここで，$l := \min\{m,\, k\}$ であり，$C$ は $h$ と $u$ に依らない正定数である．

**証明．** $e_h := u - u_h$ として，これを既知データとする補助的な問題：

$$(195)\quad \begin{cases} \text{Find } w \in V \text{ such that} \\ a(v,\, w) = (v,\, e_h) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

を考える．$e_h \in L^2(\Omega)$ なので，命題 103 より，$w \in H^2(\Omega)$ となり，さらに，

$$(196)\quad \|w\|_{2,\Omega} \le C\|e_h\|_{0,\Omega}$$

が成り立つ．

今，(195) で $v = e_h$ ($\in V$) とすると，

$$(197)\quad \|e_h\|_{0,\Omega}^2 = a(e_h,\, w)$$

となる．さらに，

$$(198)\quad \begin{aligned} a(e_h,\, w) &= a(e_h,\, w - \mathcal{I}_h w) \quad \text{（(146) による）} \\ &\le |e_h|_{1,\Omega}|w - \mathcal{I}_h w|_{1,\Omega} \quad \text{(Schwarz の不等式による)} \\ &\le Ch^l|u|_{l+1,\Omega}Ch|w|_{2,\Omega} \quad \text{(定理 102 と定理 101 による)} \\ &\le Ch^{l+1}|u|_{l+1,\Omega}\|e_h\|_{0,\Omega} \quad \text{((196) による)}. \end{aligned}$$

(197), (198) より，(194) が得られる． ■

# 8　抽象的誤差解析

## 8.1　抽象的変分問題

二つの Hilbert 空間 $X, Y$ を考える．$X$ と $Y$ の内積をそれぞれ $(\cdot,\,\cdot)_X$ と $(\cdot,\,\cdot)_Y$ 書き，付随するノルムを $\|\cdot\|_X$ と $\|\cdot\|_Y$ と書く．双一次形式 $a(\cdot,\,\cdot) : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ を考える．$a$ は有界であるとする．すなわち，

$$(199)\quad \|a\| := \sup_{\{u,\,v\} \in X \times Y \setminus \{0,\,0\}} \frac{a(u,\,v)}{\|u\|_X \|v\|_Y} < \infty$$

が成り立つものとする．

次の変分問題を考える：既知データ $f \in Y$ に対して，

$$(200)\quad \begin{cases} \text{Find } u \in X \text{ such that} \\ a(u,\,v) = (f,\,v)_Y \quad \forall v \in Y. \end{cases}$$

**例 106 (Poisson 方程式)** Poisson 方程式の斉次 Drichlet 境界値問題 (138) では，

$$X = Y := \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ on } \Gamma \right\},$$

$$(u,\,v)_X = a(u,\,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x}$$

とする．また，Riesz の表現定理より，任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対して，ある $\tilde{f} \in X$ が存在して，

$$(\tilde{f},\,v)_X = \int_\Omega f v \, d\boldsymbol{x} \quad \forall v \in X$$

が成り立つ．実は，$\tilde{f}$ は解 $u$ になる．

**例 107 (移流拡散方程式)** 有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ において次の移流拡散方程式の斉次 Dirichlet 境界値問題を考える：

$$(201)\quad \begin{cases} -\Delta u + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla u + c(\boldsymbol{x}) u & = & f & \text{in } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{on } \Gamma := \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで，$u$ は物質の濃度などを表す．問題 (201) は，移流速度ベクトル $\boldsymbol{b} \in \left[C^\infty(\overline{\Omega})\right]^d$，吸収係数 $c \in C^0(\overline{\Omega})$，発生項 $f \in L^2(\Omega)$ が与えられたときに，$u$ を求める問題である．

この問題においては，

$$X = Y := H_0^1(\Omega),$$

$$a(u,\,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x} + \int_\Omega (\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla u) v \, d\boldsymbol{x} + \int_\Omega c(\boldsymbol{x}) u v \, d\boldsymbol{x}$$

とする．この時，$a(\cdot,\,\cdot)$ は非対称になる．

**例 108 (Stokes 方程式)** 有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ において次の Stokes 方程式の斉次 Dirichlet 境界値問題を考える：

$$(202)\quad \begin{cases} -\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p & = & \boldsymbol{f} & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} & = & 0 & \text{in } \Omega, \\ \boldsymbol{u} & = & 0 & \text{on } \Gamma := \partial\Omega \quad \text{（粘着境界条件）}. \end{cases}$$

ここで，問題 (202) は，外力 $\boldsymbol{f} = (f_1,\,\ldots,\,f_d)$ が与えられたときに，境界での速度が零になる流体の流速 $\boldsymbol{u} = (u_1,\,\ldots,\,u_d)$ と圧力 $p$ を求める問題である．

この時，

$$X = Y := \left[H_0^1(\Omega)\right]^d \times L_0^2(\Omega)$$

ここで，

$$L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid \int_\Omega q\, d\boldsymbol{x} \right\}$$

である．さらに，

$$a(\{\boldsymbol{u},\, p\},\, \{\boldsymbol{v},\, q\}) := \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega p \,\mathrm{div}\, \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega q \,\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}\, d\boldsymbol{x}$$

とする．

**定理 109 (Babuška[32])** 任意の $f \in Y$ に対して，問題 (200) が唯一つの解 $u \in X$ を持ち，さらに，$f$ に依らないある正定数 $C$ が存在して，

(203) $\|u\|_X \le C\|f\|_Y$

が成り立つための必要十分条件は，次の 2 式が成り立つことである：

$$(204) \quad \inf_{u \in X\setminus\{0\}} \sup_{v \in Y\setminus\{0\}} \frac{a(u,\, v)}{\|u\|_X \|v\|_Y} \quad > \quad 0,$$

$$(205) \quad \sup_{u \in X\setminus\{0\}} \frac{a(u,\, v)}{\|u\|_X} \quad > \quad 0 \quad \forall v \in Y \setminus \{0\}.$$

**註記 110** (204) は inf-sup 条件と呼ばれる．

以下で，定理 109 を証明する．

有界双一次形式 $a(\cdot,\, \cdot)$ に付随して，作用素 $A \in \mathcal{L}(X,\, Y)$ を

(206) $a(u,\, v) = (Au,\, v)_Y \quad \forall u \in X, \quad \forall v \in Y$

で定義できる．作用素 $A$ を用いると，問題 (200) を次のように書き換えることができる：

$$(207) \quad \begin{cases} \text{Find } u \in X \text{ such that} \\ Au = f \quad \text{in } Y. \end{cases}$$

**定義 111** $X,\, Y$ をノルム空間とする．

$$\mathrm{Isom}(X,\, Y) := \left\{ A \in \mathcal{L}(X,\, Y) \mid A \text{ は全単射} \wedge A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,\, X) \right\}.$$

**註記 112** $X,\, Y$ が Banach 空間の時には，開写像定理より，

$$\mathrm{Isom}(X,\, Y) = \{ A \in \mathcal{L}(X,\, Y) \mid A \text{ は全単射 } \}$$

となる．

ここで，$A \in \mathrm{Isom}(X,\, Y)$ であることと，問題 (200) が任意の $f \in Y$ に対して唯一つの解 $u \in X$ を持ち，(203) が成立することは同値なので，定理 109 を示すためには，次の定理を示せばよいことになる．

**定理 113**

(208) $A \in \mathrm{Isom}(X,\, Y) \Longleftrightarrow (204) \wedge (205)$

定理 113 は第 8.1.2 節で証明する．

**註記 114** $A \in \mathrm{Isom}(X,\, Y)$ の時，(207) の解 $u$ は $u = A^{-1}f$ で与えられるので，(203) の $C$ は $C = \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,\, X)}$ で与えられる．

**註記 115** $\|a\| = \|A\|_{\mathcal{L}(X,\, Y)}$ となる．

### 8.1.1 関数解析的準備

**補題 116** $X$ を Hilbert 空間とする．$M \subset X$ に対して，

(209) $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{M}$

が成り立つ．

**証明．**

(210) $M^{\perp} = \left(\overline{M}\right)^{\perp}$

を示す．$M \subset \overline{M}$ より，$M^{\perp} \supset \left(\overline{M}\right)^{\perp}$ なので，

(211) $M^{\perp} \subset \left(\overline{M}\right)^{\perp}$

を示せば良い．任意の $u \in M^{\perp}$ に対して，

$$(u,\, u')_X = 0 \quad \forall u' \in M$$

が成り立つので，

$$(u,\, u')_X = 0 \quad \forall u' \in \overline{M}$$

が成り立つことが分かる．これより，$u \in \left(\overline{M}\right)^{\perp}$ であり，(211) が成り立つことが分かる．よって，(210) が成立する．(210) の両辺の直交補空間をとると，$\overline{M}$ は閉部分空間なので，(209) を得ることができる． ■

**命題 117** $X, Y$ を Hilbert 空間とする．任意の $B \in \mathcal{L}(X,\, Y)$ に対し，

(212) $X \;=\; N(B) \oplus \overline{R(B^T)},$

(213) $Y \;=\; N(B^T) \oplus \overline{R(B)}$

が成り立つ．ここで，

$$\begin{aligned} N(B) &:= \{u \in X \mid Bu = 0\}, \\ R(B) &:= \{Bu \in Y \mid u \in X\} \end{aligned}$$

である．また，$B^T \in \mathcal{L}(Y,\, X)$ は

(214) $(u,\, B^T v)_X = (Bu,\, v)_Y \quad \forall u \in X, \quad \forall v \in Y$

によって定義される $B$ の共役作用素である．

**証明．** (212) を示すためには，Hilbert 空間の射影定理より，

(215) $N(B)^{\perp} = \overline{R(B^T)}$

を示せば良い．

まず，

(216) $N(B)^{\perp} \supset \overline{R(B^T)}$

を示す．任意の $u \in R(B^T)$ に対して，ある $v \in Y$ が存在して，$u = B^T v$ が成り立つ．任意の $u' \in N(B)$ に対して，

$$(u,\, u')_X = (B^T v,\, u')_X = (v,\, Bu')_Y = 0$$

これより，$u \in N(B)^{\perp}$ であることが分かる．よって，$R(B^T) \subset N(B)^{\perp}$ となることが分かる．これより，$N(B)^{\perp}$ が閉部分空間なので，(216) が従う．

次に，

(217) $N(B)^{\perp} \subset \overline{R(B^T)}$

を示す．そのために，まず，

(218) $R(B^T)^{\perp} \subset N(B)$

を示す．任意の $u \in R(B^T)^{\perp}$ と任意の $v \in Y$ に対して，

$$0 = (u,\, B^T v)_X = (Bu,\, v)_Y$$

が成り立つので，$Bu = 0$，すなわち，$u \in N(B)$. ゆえに，(218) が示せた．(218) の両辺の直交補空間をとり，補題 116 を使うと，(217) を得ることができる．

(216), (217) から (215) が得られる．

(213) は，$(B^T)^T = B$ であるから，(212) から従う． ■

**補題 118** $X, Y$ を Hilbert 空間とし，$B \in \mathcal{L}(X,\, Y)$ とする．この時，

(219) $\|B\|_{\mathcal{L}(X,\, Y)} = \left\|B^T\right\|_{\mathcal{L}(Y,\, X)}$

が成り立つ．

**証明.**

$$\begin{aligned}
\|B\|_{\mathcal{L}(X,\, Y)} &= \sup_{u \in X\setminus\{0\}} \frac{\|Bu\|_Y}{\|u\|_X} \\
&= \sup_{u \in X\setminus\{0\}} \sup_{v \in Y\setminus\{0\}} \frac{(Bu,\, v)_Y}{\|u\|_X \|v\|_Y} \\
&= \sup_{u \in X\setminus\{0\}} \sup_{v \in Y\setminus\{0\}} \frac{(u,\, B^T v)_X}{\|u\|_X \|v\|_Y} \\
&\leq \left\|B^T\right\|_{\mathcal{L}(Y,\, X)}.
\end{aligned}$$

同様にして，$\left\|B^T\right\|_{\mathcal{L}(Y,\, X)} \leq \|B\|_{\mathcal{L}(X,\, Y)}$ を示すことができる． ■

**命題 119** $X, Y$ を Hilbert 空間とする．

(220) $A \in \mathrm{Isom}(X,\, Y) \Longleftrightarrow A^T \in \mathrm{Isom}(Y,\, X)$

が成り立つ．さらに，$A \in \mathrm{Isom}(X,\, Y)$ の時，

(221) $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$

が成り立つ．この時，$\left(A^T\right)^{-1}$ $(= \left(A^{-1}\right)^T)$ を $A^{-T}$ と書くことにする．ここで，$A^T$ は (214) と同様に定義される $A$ の共役作用素である．

**証明.** (220) を示すためには，$(A^T)^T = A$ なので，

(222) $A \in \mathrm{Isom}(X,\, Y) \Longrightarrow A^T \in \mathrm{Isom}(Y,\, X)$

のみを示せば良い．$A \in \mathrm{Isom}(X,\, Y)$ とする．この時，$R(A) = Y$ なので，(213) より，$N(A^T) = \{0\}$ となる．よって，あとは $R(A^T) = X$ を示せば良い．これを示すためには，$R(A^T) \subset X$ は明らかなので，

(223) $X \subset R(A^T)$

を示せば良い．任意の $u \in X$ に対して，$v := (A^{-1})^T u \ (\in Y)$ とする．この時，任意の $u' \in X$ に対して，

$$\begin{aligned}(A^T v,\, u')_X &= (v,\, Au')_Y \\ &= ((A^{-1})^T u,\, Au')_Y \\ &= (u,\, A^{-1}Au')_X \\ &= (u,\, u')_X\end{aligned}$$

となるので，

(224) $u = A^T v \equiv A^T (A^{-1})^T u$

となることが分かる．よって，(223) が示せた．以上より，(220) が示せた．

今，$A \in \mathrm{Isom}(X,\, Y)$ とすると，$A^T \in \mathrm{Isom}(Y,\, X)$ なので，$(A^T)^{-1} \in \mathrm{Isom}(X,\, Y)$ が存在し，これを (224) の各辺に作用させると．(221) が得られる． ■

### 8.1.2 定理 113 の証明

($\Longleftarrow$) を示す．

(225) $\alpha := \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \sup_{v \in Y \setminus \{0\}} \dfrac{a(u,\, v)}{\|u\|_X \|v\|_Y} = \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \sup_{v \in Y \setminus \{0\}} \dfrac{(Au,\, v)_Y}{\|u\|_X \|v\|_Y} = \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \dfrac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X}$

より，$\alpha > 0$ で，

(226) $\|Au\|_Y \geq \alpha \|u\|_X \quad \forall u \in X$

が成り立つ．これより，$N(A) = \{0\}$ となることが分かる．

次に，$R(A) = Y$ を示す．(226) より，$R(A)$ は閉であることが分かる．また，任意の $v \in Y$ に対し，

(227) $\sup_{u \in X \setminus \{0\}} \dfrac{a(u,\, v)}{\|u\|_X} = \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \dfrac{(Au,\, v)_Y}{\|u\|_X} = \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \dfrac{(u,\, A^T v)_X}{\|u\|_X} = \|A^T v\|_X$

となるので，(205) より，$N(A^T) = \{0\}$ となることが分かる．したがって，(213) から $R(A) = Y$ となることが分かる．

($\Longrightarrow$) を示す．$A \in \mathrm{Isom}(X,\, Y)$ だから，任意の $v \in Y$ に対して，

$$\left\|A^{-1} v\right\|_X \leq \left\|A^{-1}\right\| \|v\|_Y$$

が成り立つ．ここで，$u := A^{-1} v$ とおけば，

(228) $\|u\|_X \leq \left\|A^{-1}\right\| \|Au\|_Y$

となり，$A^{-1}$ は全射だから，(228) が任意の $u \in X$ に対して成立することが分かる．これより，

$$\left\|A^{-1}\right\|^{-1} \leq \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X}$$

が成り立ち，(225) を使うと，(204) が成立することが分かる．

また，命題 119 より，$A^T \in \mathrm{Isom}(Y,\, X)$ であり，$A^T$ の単射なので，$N(A^T) = \{0\}$ である．よって，(227) より，(205) が成り立つことが分かる． ■

### 8.1.3　補足

**註記 120**　$A \in \mathrm{Isom}(X, Y)$ の時，命題 119 より，$A^T \in \mathrm{Isom}(Y, X)$ であるから，

$$A \in \mathrm{Isom}(X, Y) \Longleftrightarrow (204) \wedge \inf_{v \in Y \setminus \{0\}} \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{a(u, v)}{\|u\|_X \|v\|_Y} > 0$$

が成り立つことが分かる．ここで，一般には，

$$\inf_{v \in Y \setminus \{0\}} \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{a(u, v)}{\|u\|_X \|v\|_Y} > 0 \Longrightarrow (205)$$

であることに注意せよ．

**補題 121**　$X, Y$ を Hilbert 空間とする．$A \in \mathrm{Isom}(X, Y)$ に対し，

$$(229)\ \ \|A^{-1}\|^{-1} = \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \sup_{v \in Y \setminus \{0\}} \frac{a(u, v)}{\|u\|_X \|v\|_Y} (\equiv \alpha)$$

が成り立つ．

**証明.**

$$\begin{aligned} \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \sup_{v \in Y \setminus \{0\}} \frac{(Au, v)_Y}{\|u\|_X \|v\|_Y} &= \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X} \\ &= \left( \sup_{v \in Y \setminus \{0\}} \frac{\|A^{-1}v\|_X}{\|v\|_Y} \right)^{-1} \quad \text{(この等式の証明は後述する．)} \\ &= \|A^{-1}\|^{-1}. \end{aligned}$$

上記の第 2 の等式を証明する．(225) のように $\alpha$ を定義すると，$A \in \mathrm{Isom}(X, Y)$ より，$\alpha > 0$ であり，

$$(230)\ \ \alpha = \left( \sup_{v \in Y \setminus \{0\}} \frac{\|A^{-1}v\|_X}{\|v\|_Y} \right)^{-1}$$

を示せばよいことが分かる．(225) より，

$$\alpha \leq \frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X} \quad \forall u \in X \setminus \{0\}$$

が成り立つ．$A$ は全単射なので，

$$\frac{\|A^{-1}v\|_X}{\|v\|_Y} \leq \alpha^{-1} \quad \forall v \in Y \setminus \{0\}$$

が成り立つ．これより，

$$\sup_{v \in Y \setminus \{0\}} \frac{\|A^{-1}v\|_X}{\|v\|_Y} \leq \alpha^{-1}$$

となることが分かる．あとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $v_0 \in Y \setminus \{0\}$ が存在して，

$$(231)\ \ \alpha^{-1} - \frac{\|A^{-1}v_0\|_X}{\|v_0\|_Y} < \varepsilon$$

が成り立つことを示せばよい．$\alpha > 0$ なので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，

$$|\tau - \alpha| < \delta \Longrightarrow |\tau^{-1} - \alpha^{-1}| < \varepsilon$$

が成り立つ．(225) より，ある $u_0 \in X \setminus \{0\}$ が存在して，

$$\frac{\|Au_0\|_V}{\|u_0\|_X} - \alpha < \delta$$

が成り立つ．$v_0 := Au_0$ とすれば，(231) が成り立つことが分かる．　■

**系 122** $X, Y$ を Hilbert 空間とする．$A \in \mathrm{Isom}(X, Y)$ とする．この時，

$$\|A^{-T}\|^{-1} = \inf_{v\in Y\setminus\{0\}} \sup_{u\in X\setminus\{0\}} \frac{a(u,\,v)}{\|u\|_X\|v\|_Y}$$

が成り立つ．さらに，

$$\inf_{v\in Y\setminus\{0\}} \sup_{u\in X\setminus\{0\}} \frac{a(u,\,v)}{\|u\|_X\|v\|_Y} = \|A^{-T}\|^{-1} = \|A^{-1}\|^{-1} = \inf_{u\in X\setminus\{0\}} \sup_{v\in Y\setminus\{0\}} \frac{(Au,\,v)_Y}{\|u\|_X\|v\|_Y}(\equiv \alpha) \tag{232}$$

が成り立つ．

**証明．** 命題 119，補題 121，補題 118 よりしたがう． ■

ここで，有名な Lax-Milgram の定理を紹介する．

**定理 123** 双 1 次形式 $a\colon X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ が有界で，強圧的 (coercive)：

$$\exists\tilde{\alpha} > 0 \text{ s.t. } a(u,\,u) \geq \tilde{\alpha}\|u\|_X^2 \quad \forall u \in X \tag{233}$$

ならば，$A \in \mathrm{Isom}(X,\,X)$.

**証明．** 定理 113 と下記の命題 124 からしたがう． ■

**命題 124** 双 1 次形式 $a\colon X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ が有界で強圧的ならば，(204) と (205) が成り立つ．

**演習問題 125** 命題 124 を証明せよ．

**註記 126 (強圧性について)** 例 106 では，

$$a(u,\,u) = \|u\|_X^2 \quad \forall u \in X$$

が成立するので，(233) が成り立つ．

例 107 では，

$$\exists\delta > 0 \text{ s.t. } c(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \geq \delta \quad \forall\boldsymbol{x} \in \Omega$$

が成立する時，(233) が成り立つ．

例 108 では，(233) は成立しない．例 108 において，(204) と (205) を成り立たせる必要十分条件は Brezzi[33, 34] によって，研究がなされた．

## 8.2 離散近似問題と誤差評価

Hilbert 空間 $X, Y$ のそれぞれの有限次元部分空間 $X_h, Y_h$ を考える．この時，問題 (200) の離散近似問題を次のように設定する：

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Find } u_h \in X_h \text{ such that}\\ a(u_h,\,v_h) = (f,\,v_h)_Y \quad \forall v_h \in Y_h,\end{array}\right. \tag{234}$$

作用素 $A_h \in \mathcal{L}(X_h,\,Y_h)$ を

$$a(u_h,\,v_h) = (Au_h,\,v_h)_Y \quad \forall u_h \in X_h, \quad \forall v_h \in Y_h \tag{235}$$

で定義できる．また，$Y$ から $Y_h$ への $(\cdot,\,\cdot)_Y$ に関する直交射影作用素を $P_h$ と書く．すると，問題 (234) を次のように書き換えることができる：

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Find } u_h \in X_h \text{ such that}\\ A_h u_h = P_h f \quad \text{in } Y_h.\end{array}\right. \tag{236}$$

**命題 127** 双 1 形式 $a(\cdot,\cdot)$ は有界，すなわち，(199) が成立するものとする[35].

(237) $\dim X_h = \dim Y_h$

かつ

(238) $\alpha_h := \inf_{u_h \in X_h \setminus \{0\}} \sup_{v_h \in Y_h \setminus \{0\}} \dfrac{a(u_h,\, v_h)_Y}{\|u_h\|_X \|v_h\|_Y} > 0$

が成り立つ時，任意の $f \in Y$ に対し，問題 (234) は唯一つの解 $u_h$ を持つ．さらに，

(239) $\|u_h\|_X \le \alpha_h^{-1} \|f\|_Y \bigl(= \|A_h^{-1}\|\, \|f\|_Y\bigr)$

が成立する．

**証明．** (238) より，

(240) $\sup_{v_h \in Y_h \setminus \{0\}} \dfrac{a(u_h,\, v_h)_Y}{\|v_h\|_Y} \ge \alpha_h \|u_h\|_X \quad \forall u_h \in X_h$

が成立する．すなわち，

(241) $\|A_h u_h\|_Y \ge \alpha_h \|u_h\|_X \quad \forall u_h \in X_h$

が成立する．これより，$A_h$ は単射であることが分かる．よって，(237) より，$A_h$ は全単射，すなわち，$A_h \in \mathrm{Isom}(X_h,\, Y_h)$ であることが分かる．このことから，$u_h = A_h^{-1} P_h f$ なので，(239) を得ることができる．さらに，(229) より，

(242) $\alpha_h = \|A_h^{-1}\|^{-1}$

であることにも注意する． ■

**命題 128 (Céa の補題 [35])** 命題 127 の仮定のもとで，任意の $f \in Y$ に対し，$u \in X$ は (200) を満たすものとし，$u_h \in X_h$ は (234) の解とする．この時，

(243) $\|u - u_h\|_X \le \bigl(1 + \|A\|\|A_h^{-1}\|\bigr) \inf_{w_h \in X_h} \|u - w_h\|_X$

が成り立つ．

**証明．** Galerkin 直交性が成り立つ：

(244) $a(u - u_h,\, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in Y_h.$

任意の $w_h \in X_h$ に対して，三角不等式より，

(245) $\|u - u_h\|_X \le \|u - w_h\|_X + \|w_h - u_h\|_X$

が成り立つ．さらに，

(246)
$$\begin{aligned} \alpha_h \|w_h - u_h\|_X &\le \sup_{v_h \in Y_h \setminus \{0\}} \frac{a(w_h - u_h,\, v_h)_Y}{\|v_h\|_Y} \quad \text{((238) より)} \\ &= \sup_{v_h \in Y_h \setminus \{0\}} \frac{a(w_h - u,\, v_h)_Y}{\|v_h\|_Y} \quad \text{((244) より)} \\ &\le \sup_{v \in Y \setminus \{0\}} \frac{a(w_h - u,\, v)_Y}{\|v\|_Y} \quad (Y_h \subset Y \text{ より}) \\ &= \|A(w_h - u)\|_Y \\ &= \|A\| \|(w_h - u)\|_X. \end{aligned}$$

---

[35] inf-sup 条件 (204), (205) は仮定する必要はない．

(245) と (246) より，

$$\|u - u_h\|_X \leq (1 + \|A\|/\alpha_h)\|u - w_h\|_X$$

を得ることができる．よって，$w_h$ の任意性から (243) を得ることができる．この時，(242) も使っている． ■

近似解の誤差評価を導出するために，$X$ と $Y$ のそれぞれの有限次元部分空間の族 $\{X_h\}_{0<h\leq\bar{h}}$ と $\{Y_h\}_{0<h\leq\bar{h}}$ を考える．

**定理 129** 双 1 形式 $a(\cdot, \cdot)$ は有界とする．各 $h \in (0, \bar{h}]$ に対して，(237) が成り立つものとする．また，ある $\alpha_0 > 0$ が存在して，任意の $h \in (0, \bar{h}]$ に対して

$$(247)\ \ \alpha_h \equiv \inf_{u_h \in X_h \setminus \{0\}} \sup_{v_h \in Y_h \setminus \{0\}} \frac{a(u_h, v_h)}{\|u_h\|_X \|v_h\|_Y} \geq \alpha_0 \left(\Longleftrightarrow \left\|A_h^{-1}\right\| \leq \alpha_0^{-1}\right)$$

が成立するものとする．任意の $f \in Y$ に対し，$u \in X$ は (200) を満たすものとし，$u_h \in X_h$ は (234) の解とする．この時，

$$(248)\ \ \|u - u_h\|_X \leq \left(1 + \frac{\|A\|}{\alpha_0}\right) \inf_{w_h \in X_h} \|u - w_h\|_X$$

が成り立つ．

**証明**．命題 128 から容易に証明できる． ■

**註記 130** (247) は一様 inf-sup 条件と呼ばれることがある．

**註記 131** 標語的に，大雑把な言い方をすれば，

「$\left\|A_h^{-1}\right\|$ が $h$ に関して有界であれば，近似解は収束する．」

ということになる．

**註記 132** Poisson 方程式（例 106）や移流拡散方程式（例 107）では，強圧性 (233) が成立しているので，一様 inf-sup 条件 (247) が成り立つことは容易に示せる．よって，誤差評価式 (248) は成立する．

Stokes 方程式（例 108）に対する一様 inf-sup 条件 (247) については，より議論が必要である (Brezzi[33, 34] を見よ)．

# 参考文献

[1] 菊地文雄，有限要素法概説 [新訂版]，サイエンス社，1999.（本講義テキスト）

[2] 菊地文雄，有限要素法の数理 数学的基礎と誤差解析，培風館，1994.（本講義テキスト）

[3] 田端正久，微分方程式の数値解法 II，岩波講座応用数学，岩波書店，1994.（本講義準テキスト）

[4] 田端正久，中尾充宏，偏微分方程式から数値シミュレーションへ／計算の信頼性評価–数値解析の新たな切り口，現代技術への数学入門シリーズ，講談社サイエンティフィク (2008).

[5] Courant, R.: Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bull. Amer. Math. Soc.* **49**, (1943) 1–23.

[6] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, L. P. Topp: Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aeronautical Society*, **23** (1956) 805–854.

[7] Oden, J. Tinsley: Finite elements: an introduction. *Handbook of numerical analysis, Vol. II*, 3–15, Handb. Numer. Anal., II, North-Holland, Amsterdam, 1991.

[8] 森 正武，数値解析（第 2 版），共立数学講座 12，共立出版，2002.

[9] 山本哲朗，北川高嗣，数値解析演習，サイエンス社，1991.

[10] Saad, Yousef, Iterative methods for sparse linear systems. Second edition. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2003.

[11] 森 正武，FORTRAN77 数値計算プログラミング (岩波コンピュータサイエンス)，増補版，岩波書店，1987.

[12] 森 正武，杉原 正顕，室田 一雄，線形計算，岩波講座 応用数学，岩波書店，1994.

[13] Braess, Dietrich, Finite elements. Theory, fast solvers, and applications in elasticity theory. Translated from the German by Larry L. Schumaker. Third edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[14] P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1978.

[15] P. G. Ciarlet, Basic Error Estimates for Elliptic Problems (Chapter 1), *HANDBOOK of NUMERICAL ANALYSIS, vol. II, Finite Element Methods* (Part 1) (eds. P. G. Ciarlet and J. L. Lions), North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo, 1991, 17–351

[16] 森 正武，室田 一雄，杉原 正顕，数値計算の基礎，岩波講座 応用数学，岩波書店，1993.

[17] Jean Donea, Antonio Huerta: Finite Element Methods for Flow Problems, Wiley, 2003.

[18] J. Nečas, *Les Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques*, Masson, Paris, 1967.

[19] J. Nečas, *Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2011.

[20] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, Boston, London, Melbourne, 1985.

[21] P. Grisvard, *Singularities in Boundary Value Problems*, Masson, Paris, Milan, Barcelone, Bonn, 1992.

[22] 黒田成俊，関数解析，共立数学講座 15，共立出版，1980.

[23] 藤田宏，理論から応用への関数解析，岩波書店，2007.

[24] ハイム・ブレジス，藤田宏監訳，小西芳雄訳，関数解析，その理論と応用に向けて，産業図書，1988.

[25] L. Schwartz, 吉田耕作，渡辺二郎訳，物理数学の方法，岩波書店，1966.

[26] 溝畑茂，偏微分方程式論，岩波書店，1965.

[27] 加藤十吉，位相幾何学，裳華房，(1988).

[28] Deny, J. and Lions, J.-L., Les espaces du type de Beppo Levi. Ann. Inst. Fourier, 1953/54, **5**, 305–370.

[29] Bramble, J.H. and Hilbert, S.R., Bounds for a class of linear functionals with applications to Hermite interpolation. Numer. Math., 1971, **16**, 362–369.

[30] 田端正久，萩原一郎監訳，計算力学理論ハンドブック，朝倉書店，2010.

[31] 宮島静雄，ソボレフ空間の基礎と応用，共立出版，2006.

[32] Babuška, Ivo: Error-bounds for finite element method. Numer. Math. **16** 1970/1971 322—333.

[33] Brezzi, F.: On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers. Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge **8** (1974), no. R-2, 129—151.

[34] Brezzi, Franco; Fortin, Michel: Mixed and Hybrid Finite Element Methods. Springer Series in Computational Mathematics, 15. Springer-Verlag, New York, 1991.

[35] Céa, Jean: Approximation variationnelle des problèmes aux limites. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **14** 1964 fasc. 2, 345—444.

[36] Girault, Vivette; Raviart, Pierre-Arnaud: Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms. Springer Series in Computational Mathematics, 5. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[37] Strang, Gilbert; Fix, George J., An analysis of the finite element method. Prentice-Hall Series in Automatic Computation. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1973.

[38] Johnson, Claes, Numerical solution of partial differential equations by the finite element method. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[39] Brenner, Susanne C.; Scott, L. Ridgway, The mathematical theory of finite element methods. Third edition. Texts in Applied Mathematics, 15. Springer, New York, 2008.

[40] Ern, Alexandre; Guermond, Jean-Luc, Theory and practice of finite elements. Applied Mathematical Sciences, 159. Springer-Verlag, New York, 2004.

[41] McLean, William, Strongly elliptic systems and boundary integral equations. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.