有限要素法　レポート課題

担当：小山 大介（電気通信大学）
e-mail: koyama@im.uec.ac.jp
URL: http://www.im.uec.ac.jp/~koyama/w.html

下記の課題 1–3 のうち 1 つをレポートにせよ．

レポートは，A4 判の大きさの紙を用いて **2014 年 2 月 5 日 (水)16:00** までに 51 号館 2 階レポートボックスに提出すること．または，**2014 年 2 月 12 日（水）13 時** までに mail で提出すること．

課題 1：管の流量計算

一定の断面形を持つ真直な管に沿って一方向に流れる流体の流量を計算することを考える．ここでは，非圧縮性粘性流体の定常流れを考える．すると，流れは，次の Navier–Stokes 方程式で記述される：

$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - \mu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p &= \rho\boldsymbol{f}, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} &= 0. \end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{u}$ は流速，p は圧力，$\boldsymbol{f}$ は外力，ρ は密度，μ は粘性係数である．

今，図 1 のような楕円の断面を持つ真直な管を考え，図 1 のように x 軸，y 軸をとり，z 軸を紙面に垂直で裏から表に向かう向きを正とし，管は z 軸に並行に伸びているものとする．また，外力 $\boldsymbol{f}$ をゼロとする．流れは一方向なので，$\boldsymbol{u} = (0, 0, u)$ とすると，u は x, y のみの関数となり，断面 $\widetilde{\Omega}$ で，Poisson 方程式：

$$-\Delta u = \frac{\beta}{\mu} \quad \text{in } \widetilde{\Omega} \tag{1}$$

を満たす．ここで，$\beta := -\dfrac{\partial p}{\partial z}$ は定数となる．(詳しくは，参考文献 [1] を見よ.)

境界条件としては，粘着境界条件：

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\widetilde{\Omega} \tag{2}$$

を課すことを考える．

この時，管の単位時間当りの流量：

$$Q = \int_{\widetilde{\Omega}} u \, dxdy$$

を有限要素法を使って近似計算せよ．ただし，$\beta/\mu = 1$ とせよ．

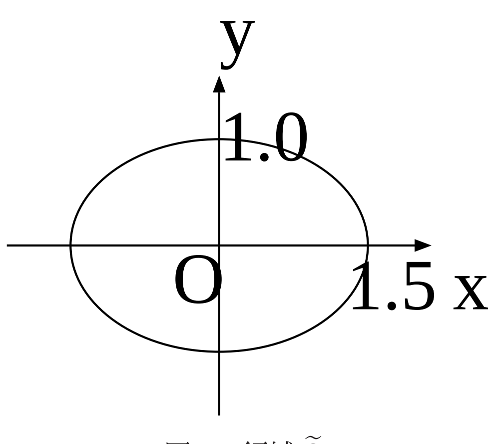

図 1：領域 $\widetilde{\Omega}$.

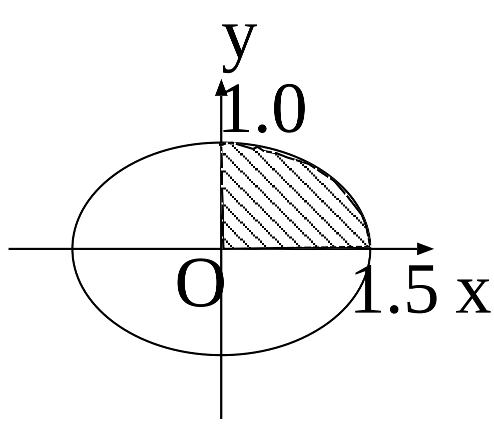

図 2：領域 Ω(斜線部分).

流速 u の有限要素近似解を求める際には，管の対称性を考慮すれば，図 2 の斜線を施した領域 Ω だけで解を求めれば十分であることが分かる．このとき，新たにできた x 軸，y 軸上の境界上では，斉次 Neumann 条件：

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

を課せば良い．

領域 Ω の三角形分割は，各自作成しても良いが，粗い三角形分割を一つ用意してあるので，それを用いても良い．そのデータ:

★ `xyc.data`: 節点・座標対応表

★ `nde.data`: 要素・節点対応表

★ `dbc.data`: Dirichlet 境界上節点の節点番号表

は `http://www.im.uec.ac.jp/~koyama/w.html` からダウンロードできる．

有限要素近似解 u_h が得られたら，流量の近似値は

$$Q \approx 4\sum_{m=1}^{M}\int_{K_m} u_h\, dxdy = 4\sum_{m=1}^{M}|K_m|u_h(G_m)$$

で計算できる．ここで，M は要素数，K_m は三角形要素，$|K_m|$ は K_m の面積，G_m は三角形 K_m の重心である．$Q \approx 0.796$ となる．

ちなみに，楕円領域 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 1$ の断面を持つ管の流量は，

$$Q = \frac{\pi\beta a^3 b^3}{4\mu(a^2+b^2)} \tag{3}$$

で与えられる（Hagen–Poiseuille の法則）[1]（cf. [1]）．

余裕があれば，メッシュを細かくして，収束状況を調べよ．

参考文献：

[1] 田端正久，中尾充宏：偏微分方程式から数値シミュレーションへ／計算の信頼性評価–数値解析の新たな切り口，現代技術への数学入門シリーズ，講談社サイエンティフィク (2008).

課題 2：

自分で問題を設定し，その問題を有限要素法を使って解き，レポートにせよ．その際，プログラミングを自分ですることを勧めるが，既存の有限要素法ソフト (FreeFEM 等）を用いても良い．ただし，使用ソフトを明記すること．

課題 3：

講義資料の演習問題を解き，レポートにせよ．分量は各自に任せる．

---

[1] 問題 (1), (2) の解は $u(x, y) = c\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1\right)$ で与えられることによる．ただし，$c = -\dfrac{\beta a^2 b^2}{2\mu(a^2+b^2)}$ である．