情報領域演習第二　**K** 演習

第 **1** 回 課題 解答
2017 年 **6** 月 **17** 日土曜日改訂版

担当者: 小山 大介
研究室: 西 4 号館 210 号室
e-mail: koyama@im.uec.ac.jp
URL: http://www.im.uec.ac.jp/~koyama/k.html

課題 1 (Bayes の定理) 検品した製品が機械 A, B, C によって製造されたものであるという事象をそれぞれ A, B, C と書くことにする．また，検品した製品が不良品であるという事象を E とする．すると，

$$P(A) = 0.1, \quad P(B) = 0.3, \quad P(C) = 0.6,$$

$$P(E|A) = 0.03, \quad P(E|B) = 0.02, \quad P(E|C) = 0.01$$

となる．Bayes の定理より，

$$\begin{aligned} P(C|E) &= \frac{P(C)P(E|C)}{P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B) + P(C)P(E|C)} \\ &= \frac{0.6 \times 0.01}{0.1 \times 0.03 + 0.3 \times 0.02 + 0.6 \times 0.01} \\ &= \frac{0.006}{0.003 + 0.006 + 0.006} \\ &= \frac{0.006}{0.015} = \boxed{0.4}. \end{aligned}$$

課題 2 (密度関数・分布関数・期待値 (離散))

(1) 密度関数 $f(x)$ は次のようになる：

$$f(x) = \boxed{pq^{x-1}} \quad \text{for } x = 1, 2, \ldots.$$

ここで，$q := 1 - p$ である．

また，確率の和が 1 になることは次のように示すことができる：

$$\sum_{x=1}^{\infty} pq^{x-1} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} pq^{n-1} = \lim_{N \to \infty} \left(1 - q^N\right) = \boxed{1}.$$

(2)

$$P(5 \le X \le 10) = \sum_{x=5}^{10} f(x) = pq^4 + \cdots + pq^9 = \boxed{q^4(1 - q^6)}.$$

(3) 6 月 10 日付けの資料に間違いがありました．大変申し訳ありませんでした．改訂しました．

次の公式 (参考文献 [1] pp.53, 54 参照) を用いる：

$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^k = \frac{r}{(1-r)^2} \quad \text{for } |r| < 1, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^k = \frac{r(r+1)}{(1-r)^3} \quad \text{for } |r| < 1, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 r^k = \frac{r(1 + 4r + r^2)}{(1-r)^4} \quad \text{for } |r| < 1. \tag{3}$$

– 平均 μ:

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} k f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k p q^{k-1} = \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{\infty} k q^k = \frac{p}{q} \frac{q}{(1-q)^2} = \boxed{\frac{1}{p}}.$$

ここで，4 つ目の等式で (1) を用いている．

平均 μ が $\dfrac{1}{p}$ となることは直感と合う．

– 分散 σ^2: $\sigma^2 = E[X^2] - \mu^2$ より，$E[X^2]$ を計算すれば良い．

$$E[X^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p q^{k-1} = \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^k = \frac{p}{q} \frac{q(q+1)}{(1-q)^3} = \frac{2-p}{p^2}.$$

ここで，4 つ目の等式で (2) を用いている．よって，

$$\sigma^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \boxed{\frac{1-p}{p^2}}.$$

– $E[aX+b]$:

$$E[aX+b] = a\mu + b = \boxed{\frac{a}{p} + b}.$$

– $E[X^3]$:

$$E[X^3] = \sum_{k=1}^{\infty} k^3 f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^3 p q^{k-1} = \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{\infty} k^3 q^k = \frac{p}{q} \frac{q(1+4q+q^2)}{(1-q)^4} = \frac{1+4q+q^2}{p^3} = \boxed{\frac{p^2-6p+6}{p^3}}.$$

ここで，4 つ目の等式で (3) を用いている．

課題 3 (密度関数・分布関数・期待値 (連続)) 分布関数 $F(x)$ は連続関数だから，各区間で x に関して微分すれば，密度関数 $f(x)$ が得られる：

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x \le 0, \\ x & \text{if} \quad 0 < x \le 1, \\ 2-x & \text{if} \quad 1 < x \le 2, \\ 0 & \text{if} \quad x > 2. \end{cases}}$$

平均，分散および $\varphi(X) = aX + b$ と $\varphi(X) = X^3$ の期待値は以下のようである：

$$\begin{aligned} \mu &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 x(2-x)\,dx = \boxed{1}. \\ \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \mu^2 = \int_0^1 x^3\,dx + \int_1^2 x^2(2-x)\,dx - \mu^2 = \frac{7}{6} - 1 = \boxed{\frac{1}{6}}. \\ E[aX+b] &= a\mu + b = \boxed{a+b}. \\ E[X^3] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^4\,dx + \int_1^2 x^3(2-x)\,dx = \boxed{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

課題 4 (Čebyšev の不等式) $\mu = 170.9, \sigma = 5.2$ である．

$$P(X \le 160.9) + P(X \ge 180.9) = P(|X - \mu| \ge 10)$$

Čebyšev の不等式: $P(|X-\mu| \ge a\sigma) \le 1/a^2$ を用いることを考える．ここで，a は，$a\sigma = 10$ より，$a = 10/5.2$ とすれば良い．このとき，$1/a^2 = 27.04/100$ なので，Čebyšev の不等式から，身長が 180.9cm 以上または 160.9cm 以下の 17 歳男性は，17 歳男性全体のたかだか $\boxed{27.04\,\%}$ であることがわかる．

参考文献

[1] 森口 繁一，一松 信，宇田川 かね久，級数・フーリエ解析, 岩波 数学公式 2, 岩波書店 (1987).