情報領域演習第二　K 演習
第 2 回 課題　解答例
2017 年 8 月 9 日水曜日　改訂版

担当者：小山 大介
研究室：西 4 号館 210 号室
e-mail: koyama@im.uec.ac.jp
URL: http://www.im.uec.ac.jp/~koyama/k.html

課題 1 (モーメント 母関数)　(1) モーメント 母関数は次のようになる：

$$\begin{aligned} E[e^{tX}] &= \int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}\,dx \\ &= \lambda\int_0^\infty e^{(t-\lambda)x}\,dx \end{aligned}$$

ここで，$t/\lambda < 1$ と仮定する．この時，$t-\lambda < 0 \iff t < \lambda$ であることにも注意せよ．この仮定のもとでは，上記の積分を次のように計算していくことができる：

$$\begin{aligned} E[e^{tX}] &= \lambda\left[\frac{1}{t-\lambda}e^{(t-\lambda)x}\right] \\ &= \frac{\lambda}{\lambda-t} \\ &= \frac{1}{1-\frac{t}{\lambda}} \\ &= \sum_{k=0}^\infty\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k \end{aligned} \tag{1}$$

一方，モーメント 母関数と各モーメントとの間の関係は

$$E[e^{tX}] = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!}E[X^k]$$

となるので，この式と (1) の各 t^k の係数は等しいということから，

$$\boxed{E[X^k] = k!\lambda^{-k}.}$$

となることが分かる．

(2) 確率変数 (X, Y) に対する同時確率密度関数は $f(x)f(y)$ で与えられる．次の変数変換を施す：

$$\left\{\begin{array}{rcl} u &=& \dfrac{x+y}{2} \\ v &=& y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2u-v \\ y &=& v \end{array}\right.$$

この変数変換の Jacobi 行列は次のようになる：

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

この時，Jacobi 行列の行列式 (Jacobian) は 2 となる．よって，確率変数 (U, V) の同時確率密度関数は $2f(2u-v)f(v)$ となる．また，確率密度関数が非ゼロになる集合

の閉包 (台 (support) と呼ぶ) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$ は，上記変数変換によって，$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \geq 0,\ 0 \leq v \leq 2u\}$ に写される (図 1 参照).

このことから，確率変数 U の密度関数 g は以下のようになる：任意の $u \geq 0$ に対して，

$$
\begin{aligned}
g(u) &= \int_0^{2u} 2f(2u-v)f(v)\,dv \\
&= 2\lambda^2 \int_0^{2u} e^{-\lambda(2u-v)} e^{-\lambda v}\,dv \\
&= 4u\lambda^2 e^{-2u\lambda}.
\end{aligned}
$$

上記の変数 v に関する積分において，積分区間が 0 から $2u$ になっているが，周辺確率密度の定義から，図 1 の赤線に沿って，$-\infty$ から ∞ まで v で積分しなければならないのだが，その中で，被積分関数となる密度関数は 0 から $2u$ の間だけで非ゼロになり，その他の部分ではゼロになっているので，その部分では積分する必要がない．ゆえに積分区間が 0 から $2u$ になっているということに注意せよ．

また，$g(u) = 0$ for $u < 0$ である．

以上まとめると，確率変数 U の密度関数 g は次のようになる：

$$
\boxed{g(u) = \begin{cases} 4u\lambda^2 e^{-2u\lambda} & \text{for} \quad u \geq 0, \\ 0 & \text{for} \quad u < 0. \end{cases}}
$$

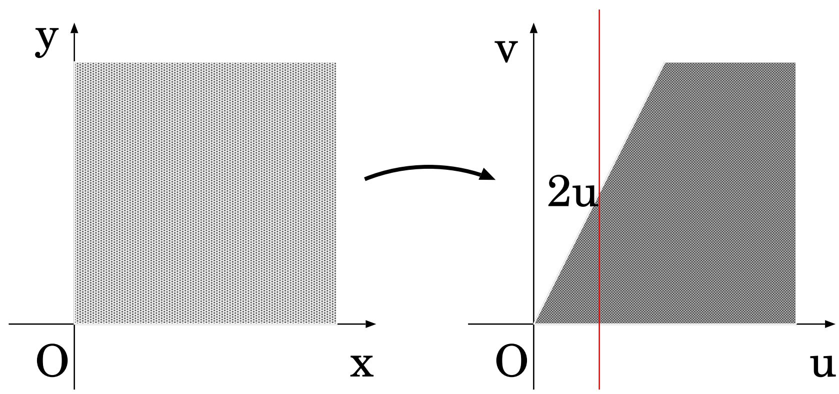

図 1: xy 平面における密度関数の台と uv 平面における密度関数の台（グレー部分）．ただし無限に伸びている部分は適当にカットしてある．

課題 2 (2 項分布・中心極限定理)

(1) 確率変数 $\overline{X}$ の密度関数 $g(\bar{x})$ は次のようになる：

$\bar{x}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
$f(\bar{x})$	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

ここで，$q := 1 - p$ である．

(2) $\boxed{\text{平均は } p.}$

$\boxed{\text{分散は } \dfrac{p(1-p)}{3}.}$

(3)

$$\boxed{g(\bar{x}) = {}_nC_k p^k q^{n-k} \quad \text{for} \quad \bar{x} = \frac{k}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).}$$

(4) 二項分布 Bin(n, p) の平均 μ_{Bin} と 分散 σ^2_{Bin} に関して，次の式は証明されているものとして，話を進める．

$$\mu_{\text{Bin}} := \sum_{k=0}^{n} k_n C_k p^k q^{n-k} = np, \tag{2}$$

$$\sigma^2_{\text{Bin}} = E_{\text{Bin}}[X^2] - \mu_{\text{Bin}} = npq. \tag{3}$$

ここで，$E_{\text{Bin}}[X^2]$ は二項分布 Bin(n, p) の 2 次モーメントである．上記 2 式の証明については，例えば，参考文献 [1] の pp.71–72 を参照せよ．

$\overline{X}$ の平均 μ は，次のようになる：

$$\begin{aligned}
\mu &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} {}_nC_k p^k q^{n-k} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k_n C_k p^k q^{n-k} \\
&= \frac{1}{n} np \quad (\text{ここで，(2) を使った}) \\
&= \boxed{p}.
\end{aligned} \tag{4}$$

$\overline{X}$ の分散 σ^2 は

$$\sigma^2 = E[\overline{X}^2] - \mu^2 \tag{5}$$

である．ここで，$E[\overline{X}^2]$ は $\overline{X}$ の 2 次モーメントである．

今，次が成り立つことに注意する：

$$\begin{aligned}
E[\overline{X}^2] &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 {}_nC_k p^k q^{n-k} \\
&= n^{-2} \sum_{k=0}^{n} k^2 {}_nC_k p^k q^{n-k} \\
&= n^{-2} E_{\text{Bin}}[X^2] \\
&= n^{-2} \left(npq + (np)^2\right) \quad (\text{ここで，(2) と (3) を使った}) \\
&= \frac{pq}{n} + p^2
\end{aligned} \tag{6}$$

式 (4), (5), (6) より，

$$\sigma^2 = \frac{pq}{n} + p^2 - p^2 = \boxed{\frac{pq}{n}}.$$

(5) 中心極限定理より，n が大きくなるにつれて，$\overline{X}$ の密度関数 $g(\bar{x})$ は，正規分布 $N(p,\ p(1-p)/n)$ に近かづく．

確率変数 $Y = n\overline{X}$ は二項分布 Bin(n, p) に従う．

正規分布 $N(p,\ p(1-p)/n)$ に従う確率変数を U とすれば，二項分布 Bin(n, p) は，n が大きくなるにつれて，確率変数 $V = nU$ が従う正規分布 $N(np,\ np(1-p))$ に近づく．(参考文献 [1] p.83 図 4-6 参照)

課題 3 (Poisson 分布) この市で 1 日に交通事故が起こる件数は Poisson 分布に従うとすると，この市で 1 日 5 件以上の交通事故が起こる確率は，$\mu = 1.5$ として，

$$\sum_{k=5}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = 1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \approx 0.0186$$

となる．よって，この市で 1 日 5 件以上の交通事故が起こるのは約 $\boxed{1/0.0186 \approx 54}$ 日に 1 度である．

課題 4 (正規分布) 魚の大きさ Xcm は平均 26cm, 標準偏差 8cm の正規分布に従っているので，変数変換：

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \iff X = \sigma Y + \mu$$

による確率変数 Y は正規分布 $N(0, 1)$ に従う．簡単な計算により，

$$x > 40 \iff y > \frac{7}{4} = 1.75$$

となる．正規分布表から $P(y > 1.75) \approx 0.0401$ となるので，大きさが 40cm を越えている確率は $\boxed{0.0401}$ なる．

参考文献

[1] 薩摩順吉, **確率・統計**, 理工系の数学入門コース 7, 岩波書店 (1989).

[2] 小針アキ宏，**確率・統計入門**, 岩波書店 (1973).