# 有限要素法 練習問題 1

2012/5/11

学籍番号 ________________　　氏名 ________________________________

**内積とノルム**

内積の性質: $c$ を任意の実数, $u, v, w$ を任意の実関数とするとき, 内積は以下の性質をもつ.

$$(u,v) = (v,u), \qquad (cu,v) = c(u,v), \qquad (u+v,w) = (u,w) + (v,w), \tag{i}$$

$$(u,u) \geqq 0 \text{ であり}, (u,u) = 0 \text{ は } u = 0 \text{ のときに限る}. \tag{ii}$$

ノルムの定義: $||u|| := \sqrt{(u,u)}$

1. 講義中で定義した $(u,v)$, $\langle u,v \rangle$:

$$(u,v) := \int_\Omega uv\,dx, \qquad\qquad \langle u,v \rangle := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx$$

は上で述べた内積の性質を満たすか？ 満たさないとすれば, どのようにすれば満たすことができるか？

2. 講義中で述べた 1 次元問題

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} = f \quad (0 < x < 1) & (2.1) \\ u(0) = \alpha, \quad \dfrac{du}{dx}(1) = \beta & (2.2) \end{cases}$$

について, $(u,v)$, $\langle u,v \rangle$ などの記号をどのように定義すれば 2 次元の場合と同様簡略化できるか？ またそれらの記号を使って弱形式

$$\int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx = \int_0^1 fv\,dx + \beta v(1) \tag{2.6}$$

を簡単に記せ.

〈裏面に続く〉

3. (Schwarz の不等式) 実数 $t$ に関する 2 次式 $at^2 + 2bt + c$ が常に正または 0 であるとき, $b^2 - ac \leqq 0$ が成り立つ (2 次方程式の解の存在条件). これを用いて, Schwarz の不等式を証明することを考える. 積分に限定しない一般の内積について, 表面枠内の定義のみを用いて以下の問いに答えよ.

(1) $t$ を実数, $u$, $v$ を関数とするとき, 内積 $(tu + v, tu + v)$ を展開せよ.

(2) (1) で得られた展開式は $t$ に関する 2 次式とみなせる. このとき, 上の $a$, $b$, $c$ に相当するものはそれぞれ何か？

(3) Schwarz の不等式 $|(u, v)| \leqq ||u||\,||v||$ を示せ。

4. (三角不等式) Schwarz の不等式を用いて, 三角不等式 $||u + v|| \leqq ||u|| + ||v||$ を示せ.