

有限要素法 練習問題 3

2012/7/13

締切: 2012/8/17 @ 西 4 号館 4 階, 事務室前のレポートボックス 2 番「龍野」まで.
返却希望の方は, 後日 tomo.tatsuno@uec.ac.jp まで連絡下さい.

学籍番号 _____ 氏名 _____

確認

本題に取りかかる前に, まず $NX = NY = 3$ として以下のことを確認しておきましょう.

1. 節点の局所番号と全体番号の対応が講義で示した表の通り変数 `ielmt` に作成されているか?
2. 全体行列 A_* が (5.38) 式で示されるように作成されているか?

さらに NX, NY の値を少し大きくし, 次の問題が解けることを確認しましょう.

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1 \quad \text{in } \Omega, \quad u = x - \frac{1}{2}x^2 \quad \text{on } \Gamma_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_2$$

ここで Ω は $0 < x, y < 1$ なる矩形領域, $\Gamma_{1,2}$ はそれぞれ Ω の境界のうち, $x = 0, y = 0$ なる 2 辺, および $x = 1, y = 1$ なる 2 辺を表し, $\partial/\partial n$ は外向きの単位法線微分を表す. 解は $u(x, y) = x - x^2/2$. また x と y を入れ替えても同じ [つまり $u = y - y^2/2$ on Γ_1 とすれば解は $u(x, y) = y - y^2/2$].

(注意) 以下, 問 1 と 2 は NX, NY として 10 以上の節点を取ること. また図は問題用紙にホチキスなどで留めるか, バラバラになってもわかるよう学籍番号と氏名を書いて下さい.

1. (10 点) 領域 Ω を $0 < x, y < 1$ なる矩形領域, Γ を Ω を取り囲む正方形 ($x = 0, 1; y = 0, 1$) とするとき, 偏微分方程式

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \Gamma,$$

を解き, 解 u をプロットせよ. また中心点 $(x, y) = (0.5, 0.5)$ での u の値を記せ. この問題は正方形の鉄板の 4 辺に氷を置き (境界条件), 鉄板を一様に加熱 (偏微分方程式の右辺は一樣) した場合の定常状態における温度分布を表す.

2. (10 点) 領域 Ω を $0 < x < 1, 0 < y < 2$ なる矩形領域, 境界のうち Γ_1 を $x = 0, 1, y = 0$ の 3 辺, Γ_2 を $y = 2$ なる 1 辺とする. このとき, 偏微分方程式

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \Gamma_1, \quad u = \sin(\pi x) \quad \text{on } \Gamma_2,$$

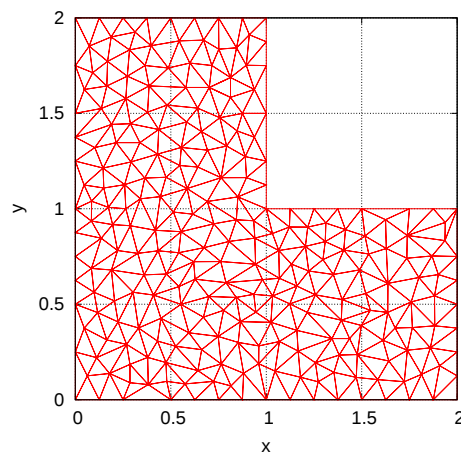
を解き, 解 u を関数 $p(x, y) = \frac{\sin(\pi x) \sinh(\pi y)}{\sinh(2\pi)}$ とともにプロットせよ. また中心点 $(x, y) = (0.5, 1)$ での u の値を記せ. この問題は, 熱源がなく (偏微分方程式の右辺がゼロ), 3 辺 (Γ_1) が氷に接しているが 1 辺 (Γ_2) の中央部が熱せられている鉄板の定常状態における温度分布を表す.

〈裏面に続く〉

3. (20 点) 以下の 6 線分

$$\begin{array}{ll} x = 0 & (0 \leq y \leq 2) \\ y = 0 & (0 \leq x \leq 2) \\ x = 2 & (0 \leq y \leq 1) \\ y = 1 & (1 \leq x \leq 2) \\ x = 1 & (1 \leq y \leq 2) \\ y = 2 & (0 \leq x \leq 1) \end{array}$$

で囲まれた L 字型領域 Ω を考える (右図参照). Ω を囲む境界のうち, 線分 $x = 0$ と $y = 0$ を Γ_1 とし, その他の線分を Γ_2 とする. このとき,



$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 1 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{on } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{on } \Gamma_2, \end{aligned}$$

を解き, 解 u をプロットせよ. また $(x, y) = (1, 1)$ での u の値を記せ. ただし, $\partial/\partial n$ は法線微分を表す.

(ヒント) 右上図のように定めた有限要素分割を, フリーソフト triangle* を用いて作成し, 節点の座標を Lshape.1.node ファイル, 局所-全体節点番号の対応づけを Lshape.1.ele ファイルに格納した. サンプルコード中の変数 `square` を 0 にするとこれらを読み込むようになるので, それを用いて計算すると良い. Lshape.1.node, Lshape.1.ele ファイルはサンプルコードに同梱してある. 同じく同梱されている Gnuplot ファイル Lshape.gp をコメントに従って適当に編集することで, 右上の図をプロットして, コード中で要素や節点がうまく定義されていることを確認できる.

4. (おまけ問題, 難) Triangle または他の要素分割ソフトを用いて, 面白い 2 次元形状 (矩形や L 字以外, 例として丸い穴の空いた矩形領域を挙げておく) について適当な偏微分方程式 (講義中で扱った Poisson 方程式でもよいし, 他のものでもよいが, 楕円型が扱いやすいでしょう) を解き, 解をプロットせよ. どのような問題を解いたか, 方程式や境界条件も記すこと.

(注) この問題は総点には含まれないが, 上手にできた人には加点する. 余裕のある人向け. この問題をやる人は, ソースコードと結果を tar でアーカイブにして tomo.tatsuno@uec.ac.jp 宛てにメールで送って下さい (混乱するのでこれ以外の問題は送らないように!!). ホームページに結果を掲載させてもらうかもしれません.

*<http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html> よりダウンロードできる.