

位相空間における磁化プラズマの2次元乱流解析

龍野 智哉

(電気通信大学情報・通信工学研究科 182-8585 東京都調布市調布ヶ丘 1-5-1 e-mail: tomo.tatsuno@uec.ac.jp)

宇宙空間や実験室における完全電離プラズマは希薄であり、粒子の平均自由行程が空間構造のスケール長よりも長い場合、通常の流体と違って局所的な熱平衡を仮定することができない。従って各点で粒子の速度分布関数を解くために Boltzmann 方程式のような理論的枠組みが必要となる。こうした系では乱流は位相空間で進行するため、速度空間構造の生成メカニズムを理解することが重要になる。本稿では、磁化プラズマの静電的2次元揺動について、位相空間乱流に関する最近の研究成果を概観する。

1. はじめに

通常流体の運動は Navier-Stokes (NS) 方程式によって (x, y, z) の3次元空間、あるいはある方向(ここでは z 方向とする)について空間変化がないと仮定できる場合には (x, y) の2次元平面において記述される。Kolmogorov や Obukhov は乱流の普遍的な性質を探るために、3次元の1様で等方な状態について現象論的な理論を構築した。粘性項が高階微分を含むため、揺動のエネルギースペクトルは「慣性領域」と呼ばれる非線形相互作用が支配的で散逸の無視できる中程度のスケールと、逆に散逸が支配的である「散逸領域」と呼ばれる小スケールの領域に分離されると考えられている(大スケールは駆動を含む領域であって普遍性は望めない)。慣性領域では同程度の大きさの渦が非線形相互作用によってより小さい渦に崩れるという過程を経て、無散逸(非粘性)保存量であるエネルギーが小スケールへと運ばれ、散逸領域で粘性によって散逸される。これをエネルギーのカスケードと呼ぶ。2次元の場合には複数の無散逸保存量が存在し、エンストロフィー(渦度の2次形式)が小スケールへ、エネルギーは逆に大スケールへとカスケードすることが Fjørtoft や Kraichnan によって指摘されている。これを双カスケードと呼ぶ。

本稿では磁化プラズマ中の乱流について述べるが、「運動論」と呼ばれる位置と速度で張られる位相空間上のダイナミクスを取り扱う。流体近似が成り立つには揺らぎの空間スケールが粒子の平均自由行程よりも大きい必要があるが、宇宙や実験室における完全電離プラズマは希薄であり、衝突が不十分であるため、平均自由行程よりも小さいスケールにまで乱流スペクトルが満ちていることがわかってきた。¹⁾ こういった小スケールの乱流によって、核融合プラズマでは輸送や閉じ込めが影響を受ける可能性があり、また太陽風プラズマでは粒子加熱が引き起こされると考えられる。

運動論は Boltzmann 方程式で支配される古典多粒子系のダイナミクスを記述するが、位相空間において乱流がどのように理解されるかはたいへん興味深い問題である。通常流体の散逸は3次元(位置)空間内の拡散作用素で表されるので、位置空間 $[(x, y, z)$ の空間] に小さい構造を生成すれば効果的な散逸が起こる。ところが Boltzmann 方程式で散逸を担うものは粒子同士の衝突であり、その衝突は「速度空間」 $[(v_x, v_y, v_z)$ の空間] の拡散型作用素で記述される。とすれば、散逸が起こるためには速度空間に小さい構造を

生成せねばならないが、そのダイナミクスについてはあまり調べられてこなかった。以下では速度空間構造の生成メカニズムと、位相空間における非線形相互作用の様子について、最近得られた結果を概観する。

2. 磁化プラズマにおける速度空間構造の生成

磁場 B によって磁化されたプラズマ中の荷電粒子は、Lorentz 力によって磁力線のまわりを旋回運動(ジャイロ運動と呼ぶ)する。これに弱い電場 E が加わると、 $E \times B$ ドリフトと呼ばれる、旋回運動よりも長い時間スケールの横滑り運動を行う(ドリフトの方向は $E \times B$ と書かれるように電場と磁場の外積で定まる)。ドリフト運動のように旋回周期よりも長い時間スケールでの物理現象を追跡する場合、磁力線まわりの旋回運動は平均化することができ、このようにして Boltzmann 方程式を簡約化した運動論モデルをジャイロ運動論と呼ぶ。²⁾ ジャイロ運動論は角速度成分について平均化しているので、位置空間3次元と速度空間2次元の5次元位相空間で記述される。

宇宙空間や核融合実験装置におけるプラズマは希薄であるため、粒子間衝突が極めて少なく、乱流カスケードする揺動は粒子の平均自由行程や熱粒子の旋回半径よりも小さいスケールにまで行きわたる。ジャイロ運動論ではダイナミクスの特徴的周波数 ω と粒子の旋回周波数 $\Omega := qB/m$ の比を $\omega/\Omega \sim O(\epsilon)$ とし、熱粒子の旋回半径 $\rho := v_{th}/\Omega$ と揺動の空間スケール l の比を $\rho/l \sim O(1)$ とするオーダーリングを行う。ただしここで q, m, v_{th} はそれぞれ粒子の電荷、質量、熱速度、また $B = |B|$ である。粒子の速度分布関数 $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ を、 F_0 を平衡状態の Maxwell 分布として

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = F_0(v) + \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (1)$$

と分け ($|\delta f|/F_0 \sim O(\epsilon)$, また $v := |\mathbf{v}|$), 旋回軌道を近似的に円とみなしてジャイロ平均 $g(\mathbf{R}, v_{\perp}, v_{\parallel}, t) := \langle \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle_{\mathbf{R}}$ を行う。ここで $\langle \cdot \rangle_{\mathbf{R}}$ は旋回中心 \mathbf{R}

$$\mathbf{R} := \mathbf{r} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{b}}{\Omega} \quad (2)$$

を固定した旋回角に関する平均化を表し、 $\mathbf{b} := \mathbf{B}/B$ である。 \parallel と \perp は磁力線に平行、垂直な方向を示す添字であって、 $v_{\parallel} := \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}$, $v_{\perp} := |\mathbf{v}_{\perp}|$ である。 g は中心の位置 \mathbf{R} , 磁力線方向に速度 v_{\parallel} で動く、半径 v_{\perp}/Ω をもったリングの時刻 t における分布関数を表す。(2) は粒子の位置 \mathbf{r} と旋

回中心の位置 \mathbf{R} の変換式とみなすことができ、粒子位置の関数の積分が欲しいときには \mathbf{r} を固定したもう一つのジャイロ平均を行う [(4) 式参照].

静電近似を仮定し、磁力線方向 (以後 z 軸に取る) の変化が無視できるとすると、 (x, y) 平面においてイオンに関する 2 次元のジャイロ運動論方程式は

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{B} \{ \langle \varphi \rangle_{\mathbf{R}}, g \} = \langle C(h) \rangle_{\mathbf{R}} \quad (3)$$

と書ける. ここで $\varphi(\mathbf{r}, t)$ は静電ポテンシャル, $\{ \cdot, \cdot \}$ は (x, y) 面内の Poisson 括弧, $h(\mathbf{R}, v_{\perp}, v_{\parallel}, t) := g + qF_0 \langle \varphi \rangle_{\mathbf{R}} / T_0$, T_0 はエネルギーの単位で測った平衡状態の温度であり, C は線形化された衝突作用素である. 電子とイオンの密度揺動をそれぞれ δn_e , δn_i とすると, 静電ポテンシャルは準中性条件 $\delta n_i = \delta n_e$ から求められ, 簡単のため $\delta n_e = 0$ と仮定すれば¹

$$\frac{q^2 n_0}{T_0} \varphi = q \int \langle h \rangle_{\mathbf{r}} d\mathbf{v} = q \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \int J_0 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \right) \hat{h} d\mathbf{v} \quad (4)$$

が得られる. ここで n_0 は平衡状態の密度, J_0 は 0 次の Bessel 関数, \hat{h} は Fourier 成分を表す. ここからわかるように, Fourier 空間では, ジャイロ平均は Bessel 関数の掛け算として表すことができる. 大スケールの極限 ($k_{\perp} \rho \rightarrow 0$) で, これらの方程式は 2 次元の NS 方程式に漸近することが示せる.³⁾ したがって, 以下で述べる乱流理論は, 2 次元の NS 乱流を位相空間に拡張したものと捉えることもできる.

ジャイロ運動論は $\ell/\rho \sim O(1)$ としたため粒子の回旋半径と同程度, またはそれよりも小さいスケールの揺動を許容する. このとき, 回旋中心は円軌道に沿って小スケールの揺動を平均化したポテンシャルに基づいてドリフト運動を行う [(3) 式 $\langle \varphi \rangle_{\mathbf{R}}$ 項] ため, 半径の大きさによって異なったドリフト運動を示す.² 粒子の回旋半径は磁力線に垂直な速度に比例するため, これは粒子の垂直速度 v_{\perp} によってドリフト運動が異なることを示す (図 1 参照). ポテンシャル揺動の小スケール構造によって分布関数の速度空間における相関が崩れる, この現象を「非線形位相混合」と呼ぶ.⁵⁾

2 次元の静電的ジャイロ運動論方程式 (3)-(4) は, 衝突がない場合, 適当な境界条件の下で次の 2 つの独立なエネルギーを保存する:

$$W := \frac{T_0}{2V} \int \frac{g^2}{F_0} d\mathbf{R} d\mathbf{v}, \quad (5)$$

$$E := \frac{q^2 n_0}{2T_0 V} \int \varphi^2 - \varphi \langle \langle \varphi \rangle_{\mathbf{R}} \rangle_{\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (6)$$

ただしここで V は領域の体積を表す. (5) より W が正定値であることは明らかであるが, E も Fourier 成分で書く

¹3 次元の場合には Boltzmann 応答 $\delta n_e \simeq en_0 \varphi / T_0$ などが仮定されるが, 以下の議論は大筋においてどちらの応答でもかわらない.⁴⁾

²ポテンシャル $\varphi(\mathbf{r}, t)$ は位置 \mathbf{r} のみの関数であるが, ジャイロ平均した $\langle \varphi \rangle_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}, v_{\perp}, t)$ は速度に依存することに注意する必要がある.

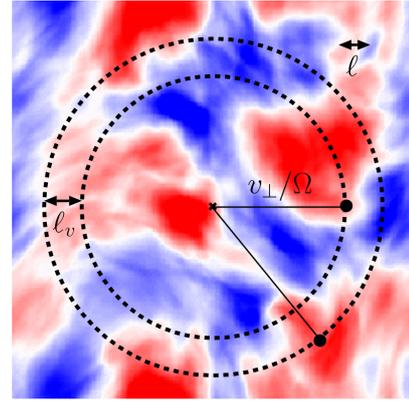


図 1 非線形位相混合のイメージ. 紙面に垂直な磁場があると, 荷電粒子は Lorentz 力によって紙面上で回旋運動をする. ジャイロ運動論では粒子 (●印) の回旋中心 (×印) は粒子の円軌道 (点線) を平均化した静電ポテンシャル (カラープロット) を感じてドリフト運動する. ポテンシャルの揺動が熱粒子の回旋半径 v_{th}/Ω と同程度かそれよりも小さいスケール ℓ に生成されると, 平均化されたポテンシャルは回旋半径が $\ell_v := \delta v/\Omega$ 程度異なる回旋中心に相関のない応答を引き起こし, $\ell_v \sim \ell$ なる構造を速度空間に生成する. 図は文献⁴⁾ より許諾を得て転載. Copyright (2009) by the American Physical Society (<http://link.aps.org/abstract/PRL/v103/e015003>).

と明らかのように正定値であることが示せる. W はエントロピー $-\int f \log f d\mathbf{r} d\mathbf{v}$ の摂動部の逆符号に比例する.

3. エントロピーのカスケード

さて, Kolmogorov が NS 乱流についてやったと同じように, 位相空間における 2 次元乱流についてもスケージング則を導出できる. 詳細は文献⁴⁾ に譲ることにして, ここでは概略だけを述べる.

まず, 一つ目の保存量 (5) の形から, 慣性領域でエントロピー束がスケールによらず一定であるとする. ここで非線形位相混合の性質 (図 1 参照) から速度空間の相関長が

$$\ell_v \sim \ell \quad (7)$$

を満たすと仮定し, (4) 式の分布関数 h がスケール ℓ_v に対応するランダムな速度依存性をもつとする. このとき (4) 式は積分することができるので, $k_{\perp} \sim \ell^{-1}$ とすれば, 慣性領域における乱流スペクトルは

$$\hat{W}(k_{\perp}) \propto k_{\perp}^{-4/3}, \quad \hat{E}(k_{\perp}) \propto k_{\perp}^{-10/3} \quad (8)$$

と定まる.

散逸領域では衝突による減衰が支配的であり, 慣性領域との境界 [(8) 式の冪乗則のカットオフ] では非線形相関時間が衝突による減衰時間とバランスすると考えられる. したがって, 衝突が速度空間における拡散型作用素で記述されることを用い, 境界領域における衝突の特徴時間が非線形相関時間とバランスすると考えると, (7) 式より速度空間の相関長は位置空間の相関長と密接に関連しているため, 位置, 速度空間のカットオフが定まる. ここで, NS 乱流の Reynolds

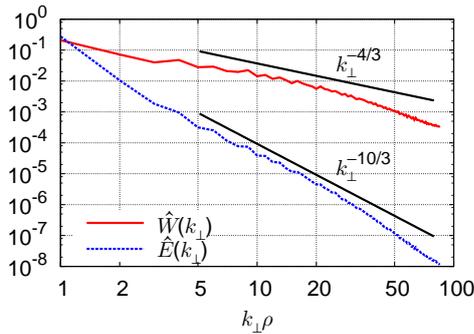


図2 時間平均された乱流の波数スペクトル. 図は文献⁴⁾より許諾を得て転載. Copyright (2009) by the American Physical Society (<http://link.aps.org/abstract/PRL/v103/e015003>).

数にならって, 位相空間乱流における非線形項と散逸項の比を特徴づける無次元数として Dorland 数

$$Do := \frac{1}{\nu\tau_\rho} \quad (9)$$

を導入する. ここで ν は衝突周波数, τ_ρ は熱速度をもつ粒子の旋回半径 ρ における非線形相関時間であり, 揺動 φ の振幅に反比例する. すなわち, Do は Reynolds 数と同様, 非線形性の強い乱流では大きい値, 散逸性のときには小さい値を取り, 速度空間を含めた小スケールの構造がどの程度生成されるかを表す. このとき位置 (および速度) 空間のカットオフスケール ℓ_c (および δv_c) は

$$\frac{\delta v_c}{v_{th}} \sim \frac{\ell_c}{\rho} \sim Do^{-3/5} \quad (10)$$

と求められる. すなわち, Dorland 数が大きいほど慣性領域は広がる.

次に, 直接数値計算の結果を示そう. 周期境界条件の下で (3)-(4) の初期値問題を AstroGK⁶⁾ を用いて解いた. 大スケールの初期条件から運動論的 Kelvin-Helmholtz 不安定性を起せば, 非線形状態で乱流カスケードを観測することができる. 不安定性が飽和した後の適当な時間において発達したスペクトルを平均化することで, 乱流の波数スペクトルが図2のように得られた.⁴⁾ このシミュレーションの Dorland 数は $Do \simeq 400$ であり, カットオフ波数 $k_{\perp c}\rho := Do^{3/5} \simeq 70$ に至るまで, スケーリング理論で得られたスペクトル (8) と整合する.

次に, 速度空間におけるスケールを特徴づけるため, 位置空間での Fourier 変換に対応して速度空間に Hankel 変換

$$\check{g}(p) := \int J_0(pv_\perp) g(v_\perp) dv \quad (11)$$

を導入する. 波数空間には k_\perp , 速度空間には p を取り, 2次元のスペクトル密度 $\hat{W}(k_\perp, p) := \sum_{|\mathbf{k}_\perp|=k_\perp} p |\hat{g}(\mathbf{k}_\perp, p)|^2$ を示したのが図3である. 初期条件 (a) では \mathbf{r} 空間でも \mathbf{v} 空間でも大スケールの構造しか存在しないが, 乱流状態 (b) ではスペクトル密度は $k_\perp\rho \sim pv_{th}$ [(k_\perp, p) 平面の対角線と

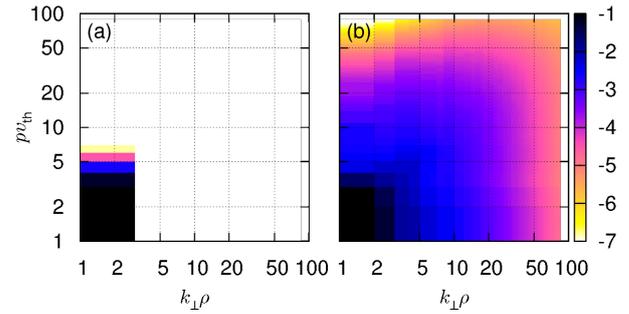


図3 (a) 初期条件, (b) 発達した乱流において時間平均された, (k_\perp, p) 空間中の 2 次元スペクトル $\log_{10}[\hat{W}(k_\perp, p)/W]$. 図は文献⁷⁾より許諾を得て転載. Copyright (2010) by the Japan Society of Plasma Science and Nuclear Fusion Research.

呼ぶことにする]に沿って発展し, 速度空間にも小スケールの構造が生成されていることがわかる [(7) 式参照].

4. 双カスケード

さて, これまではエントロピー W の順カスケードについて述べてきたが, 2次元のジャイロ運動論方程式 (3)-(4) は, (5) と (6) に示されるように少なくとも2つの保存量をもつ. 非線形相互作用が矛盾なく進行するためには, 第2保存量である E も保存しなくてはならない. カスケードが (k_\perp, p) 平面の対角線上で起こるとすれば, これはスケール空間でいうと1次元における相互作用と同等であるので, 2次元の NS 乱流における Fjørtoft の解析が役に立つ.³⁾

通常の2次元 NS 乱流では, 一つの物理量 (エントロピー) が順カスケードするのに伴い, もう一つの物理量 (エネルギー) が逆カスケードすることで双方の保存性を保つことができる. 位相空間におけるカスケードも, もし (k_\perp, p) 平面の対角線上でのみ進行すると仮定すれば, 同様の双カスケードが起こって然るべきであると考えられる. 実際, 初期条件を小スケールのもの (位置空間と速度空間ともに) に変更し, 自由減衰乱流の数値シミュレーションを行うと, 時間漸近的には対角線上の双カスケードが観測される.⁸⁾ すなわち, W は小スケールにカスケードするのに対し, E は大スケールへと逆カスケードを示す.

荷電粒子の平均速度はジャイロ平均された $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト速度であって, 大スケールの極限 ($\ell \gg \rho$) でジャイロ平均が無視できることを考えると, 静電ポテンシャル φ から平均流速が定まることがわかる. 実際大スケールの極限で静電ポテンシャルは2次元非圧縮流の流れ関数に一致し, (6) 式で表される E は NS 乱流で逆カスケードを示すエネルギーに漸近する. したがって小スケールから逆カスケードする E は, そのまま NS 領域のエネルギーとして逆カ

³⁾ 3次元についての記述が重なるので誤解がないよう補足しておく, 位置空間 \mathbf{r} が2次元であっても, 等方的な乱流ではどの方向もおおよそ均等であって, スケールを表す1つのスカラー量 ℓ を向きによらず定義できる. これをスケール空間が1次元であると述べている. 運動論的な乱流でも, 位置 \mathbf{r} について1次元のスケールで表されると考えてよいが, 速度空間 \mathbf{v} は, 乱流が等方的であっても \mathbf{r} とは独立に別のスケール長をもつ.

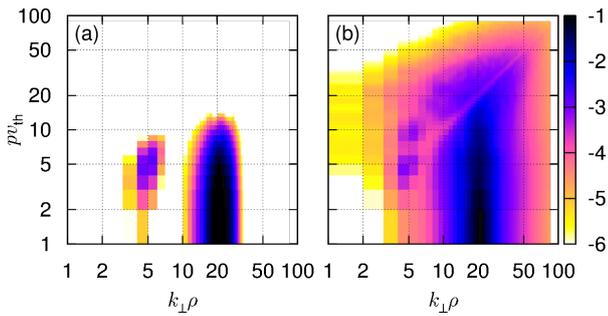


図4 (k_{\perp}, p) 空間における2次元スペクトル $\log_{10}[\hat{W}(k_{\perp}, p)/W]$ の過渡的な時間発展. 図は文献⁸⁾ より許諾を得て転載. Copyright (2011) by the American Physical Society (<http://link.aps.org/abstract/PRL/v106/e165003>).

スケードを続けると考えられる. では, NS 乱流で順カスケードを示すエントロフィーは W に対応するのであろうか? 面白いことに, g は渦度成分と, 密度に寄与しない分布関数の揺動成分に分離することができ, 大スケールの極限ではそれぞれが別個に保存することが示せる.³⁾ したがって, 大スケールからカスケードしてきたエントロフィーは, $k_{\perp}\rho \sim 1$ の領域で分布関数に密度揺動寄与のない成分を励起し, それが小スケールで W として順カスケードすることを考えることができるのである. 従って, 少なくとも2次元に関する限り, 異なったスケール間のカスケードは極めて整合した形で説明できる.

ところが駆動がある場合には対角線上のカスケードのみが発現するとは限らない. そのことを確かめるために, (k_{\perp}, p) 空間の非対角成分に有為な揺動をもつ初期条件から, 減衰乱流シミュレーションを行った場合の過渡的振舞いについて図4に示す.⁸⁾ 図4(a)の初期条件では, $k_{\perp}\rho \simeq pv_{th} \simeq 5$ なる対角成分に加え, $k_{\perp}\rho \simeq 20$, $pv_{th} < 20$ なる非対角成分に大振幅の揺動をおいた. $k_{\perp}\rho \gg 1$ で g と h が同一視できることを考えると, (4)よりわかるように非対角成分は E に寄与しない. 支配的な非対角成分は (k_{\perp}, p) 空間で拡散するように発展するが, その際に対角成分を埋め尽くし, $k_{\perp}\rho \simeq 5$ の対角成分がもつ E を消費することになる. つまり, 非対角成分の拡散に伴って, 自然な場合には大スケールへ逆カスケードするはずの E が小スケールへと運搬されるわけである. また図4(b)には, 初期の対角成分では非対角成分の拡散を補うには足りないため, $10 \lesssim k_{\perp}\rho \lesssim 50$ の対角線に沿ってスペクトル密度の低い領域ができることも観測された.

5. まとめ

本稿では, 磁化された完全電離プラズマにおける静電的な揺動を考え, 磁力線に垂直な2次元平面内での振舞いについて最近の研究成果を概観した. 粒子の平均自由行程が長いために局所熱平衡が仮定できず, 位相空間における運動の解析が必要となる. 揺動の時間スケールが荷電粒子の

磁力線まわりの旋回周期よりも長い場合には, 旋回運動について平均化したジャイロ運動論を用いて解析を簡単化することができる. このとき旋回半径の違いによる非線形位相混合から位置空間と相関した構造が速度空間に生成され, 乱流によるカスケードで運ばれた無衝突保存量が小スケールで散逸される(3節). 2次元NS乱流でカスケードする2つの保存量は自然な形で小スケール乱流の保存量へ拡張されることがわかったが, 駆動がある場合などはその限りではなく, 位置-速度空間の相関が崩れる場合もある(4節).

ここで紹介した研究のほかに, 2次元乱流を絶対平衡という観点から取り扱った問題⁹⁾ や, 3次元配位における静電的な問題,¹⁰⁾ 太陽風乱流における電磁的な問題¹¹⁾ についても発展研究が行われている. 3次元の問題を考えると, 磁力線に沿った方向に線形位相混合という速度空間構造の生成メカニズムが新たに加わるため, 本稿で述べた非線形効果との競合について調べる必要がある. 特に文献¹⁰⁾ では, 3次元にもかかわらず逆カスケードと思われる静電エネルギーの移送が観測されており [Fig.2(b)], たいへん興味深い. 今後, こういった問題についての更なる理解が求められている.

本研究は W. Dorland, G. G. Plunk, A. A. Schekochihin 博士らとの共同研究によっている. ここに謝意を表する.

参考文献

- 1) E. Mazzucato *et al.*: Phys. Rev. Lett. **101**, 075001 (2008); S. D. Bale *et al.*: Phys. Rev. Lett. **94**, 215002 (2005).
- 2) 洲鎌 英雄: プラズマ・核融合学会誌 **79**, 107 (2003); G. G. Howes *et al.*: Astrophys. J. **651**, 590 (2006); A. J. Brizard and T. S. Hahm: Rev. Mod. Phys. **79**, 421 (2007); X. Garbet *et al.*: Nucl. Fusion **50**, 043002 (2010).
- 3) G. G. Plunk *et al.*: J. Fluid Mech. **664**, 407 (2010).
- 4) T. Tatsuno *et al.*: Phys. Rev. Lett. **103**, 015003 (2009).
- 5) W. Dorland and G. W. Hammett: Phys. Fluids B **5**, 812 (1993).
- 6) R. Numata *et al.*: J. Comput. Phys. **229**, 9347 (2010).
- 7) T. Tatsuno *et al.*: J. Plasma Fus. Res. SER. **9**, 509 (2010).
- 8) G. G. Plunk and T. Tatsuno: Phys. Rev. Lett. **106**, 165003 (2011).
- 9) J.-Z. Zhu and G. W. Hammett: Phys. Plasmas **17**, 122307 (2010).
- 10) A. Bañón Navarro *et al.*: Phys. Rev. Lett. **106**, 055001 (2011).
- 11) G. G. Howes *et al.*: Phys. Rev. Lett. **107**, 035004 (2011).

(2012年4月3日原稿受付)

Phase-space analysis of two-dimensional turbulence in magnetized plasmas

Tomo TATSUNO

abstract: Fully ionized plasmas seen in space and laboratory are rarefied, and local thermodynamical equilibrium cannot be assumed unlike conventional fluids, since particles' mean free

path is longer than the typical spatial scale length. Therefore they require a theoretical framework such as Boltzmann equation for solving velocity distribution function at each position. In such systems turbulence proceeds in phase space, and it is important to understand the creation mechanism of velocity space structures. This manuscript summarizes recent developments of phase-space turbulence of electrostatic, two-dimensional fluctuations in magnetized plasmas.