講座
プラズマ理論の技法
支援論文

B．渦の発生とダイナミックスⅡ

龍 野 智 哉
（東京大学大学院新領域創成科学研究科）

Generation and Dynamics of Vortices II

TATSUNO Tomoya
Graduate School of Frontier Sciences, University of Tokyo, Tokyo 113-0033, Japan

(Received 10 April 2002)

Abstract

It is shown that the interaction of large amplitude electromagnetic waves with a relativistic electron-positron plasma leads to a bunching of mass, energy, and angular momentum in stable, long-lived structures. This structure contains a quantized angular momentum, and is called Vortex soliton. The correspondence between the nonlinear Schrödinger equation and Euler equation is reviewed. Problem related with the creation of angular momentum is also addressed.

Keywords:

vortex soliton, relativistic plasma, two-dimensional soliton, pair creation, vortex reconnection, superfluid, non-integrability

非線形問題のうち，完全解が知られているものはごくわずかである．ソリトンと呼ばれる孤立波は極めて安定した「構造」であって，粒子のように衝突しても形を変えずに伝播する特性をもつ．１次元[1]の非線形 Schrödinger 方程式はそれら可積分系のうちの一つであり，Zakharov と Shabat[2]によって Lax 対が見つけられ，我々は完全に現象を理解（記述）することができるようになった．

ここでは「渦ソリトン」（Vortex soliton）と呼ばれる多次元のソリトン解について議論する[3]．渦ソリトンは暗いソリトン（dark soliton）の一種であり，暗いソリトンは無限遠方でも有限の振幅をもつため，物理的な系では場が局在化されていなければならないという要請から，明るいソリトンとは対照的に今まで注意を払われてこなかった．しかし非線形光学分野において，局在化された背景場に重ね合わせることによって暗いソリトンを簡単に作れることが示され[4]，また超流動分野では，超流動ヘリウムが量子化された角運動量をもつことが実験的に観測されており，近年非線形 Schrödinger 方程式の研究が盛んに行われている[5, 6]．

author's e-mail: tatsuno@k.u-tokyo.ac.jp

B.1 定式化

非線形 Schrödinger 方程式が現れる一つの例として，電子ー陽電子プラズマにおける電磁波を考える[7]．支配方程式は相対論的流体方程式，および Maxwell 方程式である．空間スケールをスキン長，時間スケールをプラズマ振動数で規格化すると，これらは Coulomb ゲージで次のように表される．

$$\frac{\mathrm{d}_\pm}{\mathrm{d}t}(G^\pm\gamma^\pm)-\frac{1}{n^\pm}\frac{\partial}{\partial t}P^\pm=\mp\boldsymbol{v}^\pm\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\mp(\boldsymbol{v}^\pm\cdot\nabla\phi),\quad(1)$$

$$\frac{\mathrm{d}_{\pm}}{\mathrm{d}t}(G^{\pm}\boldsymbol{p}^{\pm})+\frac{1}{n^{\pm}}\nabla P^{\pm} = \mp\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\pm[\boldsymbol{v}^{\pm}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})]\mp\nabla\phi, \quad (2)$$

$$\frac{\partial n^{\pm}}{\partial t}+\nabla\cdot(n^{\pm}\boldsymbol{v}^{\pm})=0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A}-\nabla^2\boldsymbol{A}+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi+(n^{-}\boldsymbol{v}^{-}-n^{+}\boldsymbol{v}^{+})=0, \quad (4)$$

$$\Delta\phi=n^{-}-n^{+}. \quad (5)$$

ただし，添字の±は電子(−)および陽電子(＋)，$\gamma=\gamma=(1+\boldsymbol{v}^2)^{-1/2}$ は Lorentz 因子，$G(T)=K_3(1/T)/K_2(1/T)$ は相対論的圧力に因る実効質量密度を表す（K_n は変形 Bessel 関数）．

非磁化プラズマにおける円偏向電磁波

$$\boldsymbol{A}_{\perp}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_x+\mathrm{i}\boldsymbol{e}_y)A_{\perp}(\boldsymbol{r}_{\perp},z,t)\exp(\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t)+\mathrm{c.c.}, \quad (6)$$

の伝播を考え，包絡波に対して $L_z \ll L_{\perp}$ とする．線形波動は背景プラズマの相対論的温度を反映し，また電子，陽電子が同質量であることから

$$\omega^2=c^2k^2+\frac{2}{G_0}\omega_{\mathrm{p}}^2 \quad (7)$$

なる分散関係をもつ．ここで $G_0(T_0)$ は，先にも述べたように相対論的温度による実効質量密度の増加を表すパラメータである（G_0 は常に１より大きく，T_0〜1 MeV で $G_0\sim 4$）．添字の０は無限遠方における値を示し，また物理的な直感のために分散関係式だけは次元を陽にもつ形で記した．プラズマが光に対して透明である（$\omega\gg 1$）と仮定すると，最終的に次の非線形 Schrödinger 方程式を得る．

$$\mathrm{i}\partial_\tau A_{\perp}+\frac{1}{2}\nabla_{\perp}{}^2A_{\perp}-f(|A_{\perp}|^2)A_{\perp}=0. \quad (8)$$

ただし，γ_{g} は群速度 v_{g} に関する Lorentz 因子を表し，非線形項 $f(u)$ は

$$f(u)=2\left[\left(1-\frac{u}{\gamma_{\mathrm{g}}^2G_0^2}\right)^{-1/2}-1\right] \quad (9)$$

である．

B.2　定常解

非線形 Schrödinger 方程式（８）において，振幅が小さいとして非線形項を展開し，１次元解を探すことにすると，方程式は

$$\mathrm{i}\frac{\partial A_{\perp}}{\partial\tau}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2A_{\perp}}{\partial x^2}-\frac{1}{\gamma_{\mathrm{g}}^2G_0^2}|A_{\perp}|^2A_{\perp}=0, \quad (10)$$

となる．非線形項と分散を表す線形項が反対の符号をもったこの方程式は暗いソリトン解をもつことが知られている．Zakharov と Shabat によって逆散乱法で解けることが示されており[2]，単一ソリトン解は

$$A_{\perp}(x,\tau)=\gamma_{\mathrm{g}}G_0A_0(\alpha\tanh\Theta+\mathrm{i}\beta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A_0^2\tau}, \quad (11)$$

と表される．ただし，

$$\Theta=\alpha A_0(x-\beta A_0\tau), \quad (12)$$

であり，α, β は包絡波の振幅があらゆるところで有限な値をもつソリトンを表すために導入されたパラメータである．そのようなソリトン解は，振幅がある点で零になる「黒い」ソリトン解（$\beta=0$）と比して，「灰色の」ソリトン解と呼ばれる．

振幅に関する近似を行わずに２次元解を探すと，その時点で可積分性は破られ，解析的な解を探すことすら困難になる．ところが，定常解を探すために

$$A=\hat{A}(r)\exp(\mathrm{i}m\theta-\mathrm{i}\lambda\tau), \quad (13)$$

とおくと非線形のシューティングを行うことで容易に数値解を求めることができる．ただし $\hat{A}$ は実数とし，以下では簡単のため $A=A_{\perp}/\gamma_{\mathrm{g}}G_0$ としてベクトルポテンシャルを再規格化しておく．また(13)式は「黒い」ソリトン解しか表現しないことを述べておく．このとき $\hat{A}$ の満たす常微分方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\hat{A}+V'(\hat{A})=-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\hat{A}}{\mathrm{d}r}+\frac{m^2}{r^2}\hat{A}, \quad (14)$$

であり，ポテンシャル $V(\hat{A})$ は

$$V(\hat{A})=(\lambda+2)\hat{A}^2+4\sqrt{1-\hat{A}^2}-4 \quad (15)$$

と表される（Fig. 1）．ポテンシャル中の単一粒子に関する Newton 方程式とのアナロジーを考えると，$\hat{A}$ を粒子の位置，r を時間と見ることができる．(14)式右辺は，第１項を時間（r）に依存する摩擦，第２項は外力駆動と考えることができる．どちらも円柱座標を用いたことに

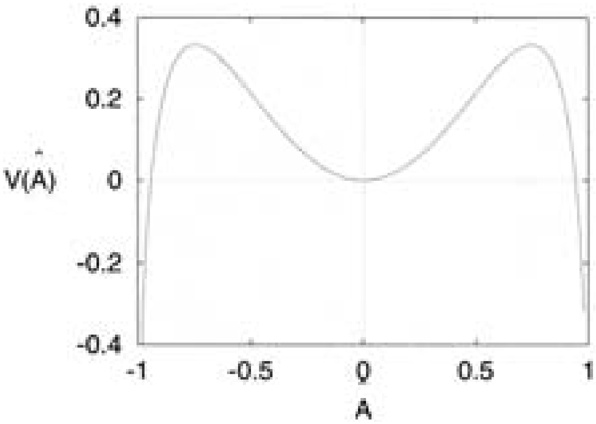

Fig. 1 Shooting potential for λ = 1.

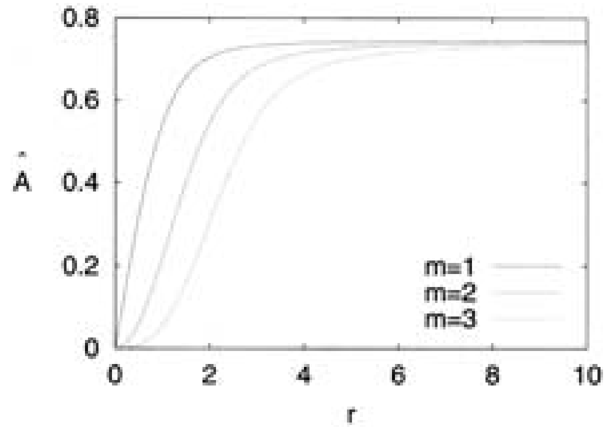

Fig. 2 Vortex soliton solution with m = 1 – 3 for λ = 1.

よって生じた項である．時刻$r=0$において$\hat{A}=0$から打ち上げられた粒子は，摩擦を感じながらポテンシャルを上っていき，時刻$r=\infty$でちょうどポテンシャルの山に静止する．これが「黒い」ソリトン解である．$m=1,2,3$の解を Fig. 2 に示す．外力駆動項がm^2に比例するため，$r\sim 0$近傍では$\hat{A}\sim r^m$の振る舞いをするが，最終的に静止するポテンシャルのピークはmに依存しないため，ソリトン解の振幅$\hat{A}_{\rm ub}$は共通である．

$m\neq 0$の解は場に角運動量

$$M_z=\frac{\mathrm{i}}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_\perp[\boldsymbol{r}_\perp\times(A_\perp^*\nabla_\perp A_\perp-\mathrm{c.c.})]_z. \tag{16}$$

をもち，渦ソリトンと呼ばれる．この角運動量M_zは非線形 Schrödinger 方程式(8)の保存量であり，電磁場の軌道角運動量$M_{\rm E}=\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}[\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})]$と定数倍を除いて等しい．渦ソリトンが運ぶ角運動量はもう一つの保存量$N=\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_\perp|A_\perp|^2$を用いて

$$M_z=mN \tag{17}$$

と表され，mは topological charge と呼ばれる．$m\neq 0$が成り立つときには，(14)から$\hat{A}$は原点で必ず零にならねばならない．角運動量の中心は topological defect と呼ばれ，ベクトルポテンシャル$A_\perp$の零点と同一視される．

B.3 流体方程式とのアナロジー

非線形Schrödinger方程式は，Madelung変換と呼ばれる変数変換を行うことにより，流体方程式に酷似した実変数の偏微分方程式系に書き直すことができる．この変換は複素数を2つの実数を用いて極表示するものであり，

$$A_\perp=\sqrt{\rho}\,\exp(\mathrm{i}\varphi) \tag{18}$$

とする．ここで，ρ，φは実数変数である．このとき，非線形 Schrödinger 方程式は

$$\partial_t\rho+\nabla\cdot(\rho\nabla\varphi)=0, \tag{19}$$

$$\partial_t\varphi+\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2=-f(\rho)+\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\rho}} \tag{20}$$

と2本の連立偏微分方程式系に書き換えることができる．ここでポテンシャル流を考えて$\boldsymbol{v}=\nabla\varphi$とすれば，(19)は質量の連続の式，(20)はその勾配が運動方程式を与えると見ることができる．

(20)式右辺第1項の$f(\rho)$は非線形性からくる項で，中性流体に読み換えると密度の関数としての通常の圧力を表すことがわかる．第2項は量子圧力(quantum pressure)と呼ばれる項で，通常の中性流体には存在しない．前節でも述べたように，topological defect においてはベクトルポテンシャルが零にならなければならないため，質量ρは渦の中心で零になる．したがって量子圧力項は渦中心で特異である．この特異性は渦度の特異性と釣り合っており，実際(13)で導入された$\varphi=m\theta$なるポテンシャルは，流体力学で古くから研究されてきた渦糸を与えるポテンシャルである[8]．渦糸が2本置かれたとき，それらは互いに相手が作る流れ場に乗って運動する．同じ強さの2つの渦糸であれば，渦の極性が同じとき2つの中点を中心として互いに回転し，また反対のときは渦糸を結ぶ線分の垂直2等分線に平行に移動する．

中性流体では Kelvin の循環定理(circulation theorem)

が存在し，流体とともに動く閉じた経路に沿った流れの線積分値は不変である．すなわち，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0. \tag{21}$$

渦ソリトン解(13)に関しては$\varphi = m\theta$と取っているから，Kelvin の循環定理はここでは topological charge m の保存を意味する．すなわち，角運動量の保存である．この流体方程式には散逸がないため，渦ソリトンの対生成等で角運動量が一度作られれば，Kelvin の循環定理が成り立つ限り渦ソリトンは壊れない．

B.4 渦ソリトンの対生成，渦糸の再結合問題

さて，では渦ソリトンは対生成されうるか？ 非線形 Schrödinger 方程式は保存系の方程式であり，Hamilton 系の力学形式に従う．保存系ではエネルギーや運動量などの保存量が存在するため，散逸系のようにエネルギーの低い（より安定な）状態への，トポロジーの変化を伴う緩和現象は起こり得ない．よく知られているように流体プラズマでも，磁力線の再結合には電気抵抗や電子慣性など非理想効果の存在が不可欠である[9]．そのような散逸を伴わない系のトポロジーの変化は，(8)のような２次元の系では対生成，および消滅，３次元の系では再結合という現象として捉えられる．

Koplik[10]は３次元矩形領域において非線形 Schrödinger 方程式の数値シミュレーションを行い，２本の渦糸が再結合してトポロジーが変化することを数値的に解析した．この計算によれば渦糸はまず互いに反平行になろうとし，渦度の向きが180 °になったところで互いに近づいて再結合する．ところが，渦糸が近づくに連れて空間構造が無限に細かくなるが，数値計算ではメッシュのサイズが有限になってしまうために数値的な散逸を伴い，近づいてきた渦糸の運動を正確に追跡することは非常に困難である．

また前節で述べた Kelvin の循環定理については，３次元における再結合の問題に関連して Ivonin[11]が議論を試みている．反平行に並んだ２本の渦糸は互いに相手が作る速度場に乗って運動するが，その速度は渦糸間の距離に反比例する．あるしきい値以上に近づいた渦糸の速度は音速を超え，Cherenkov 放射をしながらエネルギーを失って更に近づく．その際に渦糸を囲んでいた閉曲線は，最近接点の中点を通る一本を除いて渦糸に沿って無限遠方へ向かって走り去ってしまい，そしてその一本は再結合の瞬間に特異点が曲線の上に乗るので循環定理が破れてもよい，というものである．

いずれにせよ，散逸ではなく分散効果でトポロジーの変化を誘起することができるか，というのは非常に興味深い問題である．可積分な１次元の非線形 Schrödinger 方程式では決して起こり得ない現象であり，数学的には未解決の問題である．

参 考 文 献

［1］ここでいう「次元」とは，時間を除いた空間次元を指す．

［2］V.E. Zakharov and A.B. Shabat, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **61**, 118 (1971); *ibid* **64**, 1627 (1973) [Sov. Phys. JETP **34**, 62 (1972); *ibid* **37**, 823 (1973)].

［3］「ソリトン」という言葉は完全可積分な解としての響きももつが，ここでは単に「孤立波」という意味で，厳密には可積分でない解に対しても用いることにする．

［4］Y.S. Kivshar and B. Luther-Davies, Phys. Rep. **298**, 81 (1998).

［5］山田一雄，大見哲巨：超流動（培風館，1995）．

［6］超流動分野では，非線形 Schrödinger 方程式は Gross -Pitaevskii 方程式と呼ばれる．

［7］T. Tatsuno, V.I. Berezhiani and S.M. Mahajan, Phys. Rev. E **63**, 046403 (2001).

［8］A. Sommerfeld, *Mechanics of Deformable Bodies* (Academic, New York, 1950).

［9］D. Biskamp, *Magnetic Reconnection in Plasmas* (Cambridge Univ., Cambridge, 2000).

[10] J. Koplik and H. Levine, Phys. Rev. Lett. **71**, 1375 (1993).

[11] I.A. Ivonin, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **112**, 2252 (1997) [JETP **85**, 1233 (1997)].

龍野智哉（たつのともや）

1972年神戸市に生まれる．1995年京都大学理学部卒業．京都大学大学院エネルギー科学研究科を経て，1999年より東京大学大学院新領域創成科学研究科助手．2002年，京都大学博士（エネルギー科学）．専門分野：流れのあるプラズマの線形スペクトル理論，および渦ソリトンの非線形ダイナミクス．趣味：スキー，スキューバ，キックボクシング，料理．