講座

プラズマ理論の技法

支援論文

B．流れと非エルミート性

龍　野　智　哉

（東京大学大学院新領域創成科学研究科）

Flow and its Non-Hermiticity

TATSUNO Tomoya

Graduate School of Frontier Sciences, University of Tokyo, Tokyo 113-0033, Japan

(Received 10 April 2002)

Abstract

A complete spectral analysis of a non-Hermitian generator has been shown for a surface-wave model describing the Kelvin-Helmholtz instability. The canonical form of the generator contains a Jordan block in the continuous spectrum, which represents resonant interaction of a surface wave and ambient shear flow due to the overlapping of their frequencies. Secular amplification (or a long-term modulation) of oscillations is induced by the resonant (or near resonant) interactions.

Keywords:

linear stability, Kelvin-Helmholtz instability, spectral resolution, degenerate frequency, secularity

流れのない MHD プラズマの線形安定性に関しても，多次元問題などまだまだ残された課題は多いが，生成作用素がエルミート（自己随伴）であるため von Neumann のスペクトル分解定理が適用できる[1]．したがって基本的には固有値問題を解けばよいということがわかっており，得られた固有値を全て集めれば一般的な系の線形運動は記述される．例えば状態ベクトル ψ に関する時間発展方程式がエルミート作用素（Hermitian operator）$\mathcal{F}$ によって

$$\partial_t^2\psi=\mathcal{F}\psi \qquad (1)$$

と与えられたとき，$\partial_t\to-\mathrm{i}\omega$ とおきかえた固有値問題

$$-\omega^2\varphi=\mathcal{F}\varphi \qquad (2)$$

の解をすべて集めてくれば一般解が構築できるのである．したがってこの系の線形安定性は，ω^2 が負になる 2 乗可積分な固有モードが存在するか否かという問題に帰着する．固有モードは全て直交した独立なものであるため，もし異なる固有モード間で周波数が縮退していたとしても問題は起きない．

ところが流れのあるプラズマでは，生成作用素がエルミートでなくなり，一挙に問題の難しさが増す．我々が取り扱う問題は偏微分方程式であり，無限次元の問題であるが，完成された理論をもつ線形代数とのアナロジーで議論するとわかりやすい．まず Schrödinger タイプの方程式

$$\mathrm{i}\partial_t\psi=\mathcal{A}\psi \qquad (3)$$

を考える．ここで ψ は N 次元ベクトル，$\mathcal{A}$ は $N\times N$ 行列である．行列作用素に関するスペクトル理論は完成しており，Fig. 1 のように分類がなされている．これらのうち，半単純（semi-simple）行列までは固有値分解が完全

author's e-mail: tatsuno@k.u-tokyo.ac.jp

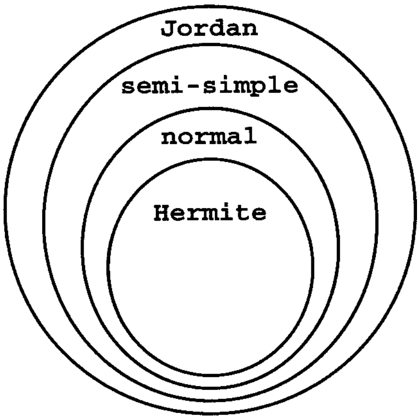

Fig. 1 Classification of finite dimension operators from the view-point of spectral theory.

であるため，安定性は固有値問題

$$\omega\varphi = \mathcal{A}\varphi \tag{4}$$

を解いて N 個の独立な固有ベクトルを求めることで判定できる．もし同一の周波数に縮退した２つの固有ベクトルがあったとしても，行列が対角化できるため，解は

$$\phi(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j(0)\exp(-\mathrm{i}\omega_j t)\varphi_j \tag{5}$$

のように N 個の指数的な時間発展の和で表される．ところが $\mathcal{A}$ がJordan行列であった場合，周波数縮退はJordan細胞を生み，モード間の除去できない相互作用を伴う．モード間の相互作用は

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \omega & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \omega & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \omega \end{pmatrix} \tag{6}$$

のように一つずつのカップリングの形で計算され，（３）の時間発展は

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \cdots, t^p\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

といった因子を含むことがわかる．したがって，もしたとえすべての固有値 ω が実数であったとしても，不安定性（非有界な振動の増幅）が存在する．振幅の代数的な成長（因子 t^p）を“ secularity ”と呼ぶ.

B.1 定式化

ここでは Kelvin-Helmholtz 不安定性[2-4]を記述する Rayleigh 方程式に周波数縮退が存在することを示し，その挙動について[2]議論する．中性流体に関する Euler 方程式

$$\rho(\partial_t \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}) = -\nabla p \tag{7}$$

をとり，２次元の非圧縮流れについて考える．線形化して（７）の回転をとれば，z 成分は渦度に関する時間発展方程式を与える．平衡流としてデカルト座標（$x \in \boldsymbol{R}$）において

$$\boldsymbol{v}_0 = [0, v(x), 0] \tag{8}$$

をとると，Rayleigh 方程式[2]

$$\mathrm{i}\partial_t \Psi = kv(x)\Psi + kv''(x)\mathcal{K}\Psi \tag{9}$$

を得る．ただしここで Ψ は摂動渦度の z 成分であり，$'$ は x 微分，$\mathcal{K} = -\Delta^{-1}$ は

$$(\mathcal{K}f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,\xi) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{10}$$

$$K(x,\xi) = \frac{\mathrm{e}^{-k|x-\xi|}}{2k} \tag{11}$$

である．y 方向の波数 k は良い量子数となる．以下では，$v''(x)$ を $v(x)$ とは独立な，ある実関数 $w(x)$ で置き換えることによって（９）を一般化して考える．つまり $k \neq 0$ として，

$$\mathrm{i}\partial_t \Psi = kv(x)\Psi + kw(x)\mathcal{K}\Psi \tag{12}$$

を考える．$w(x) = v''(x)$ となるときが物理的なRayleigh 方程式（９）を表す．境界条件は $x \to \pm\infty$ で $\Psi \to 0$ である．

B.2 作用素の性質

B.2.1 対流

ここで，(12)式中で $w(x) = 0$ と仮定し，連続な実関数 $v(x)$ について

$$\mathrm{i}\partial_t \Psi = kv(x)\Psi \tag{13}$$

を考える．(13)の生成作用素の形式的な固有値と対応する固有関数は，

$$\omega\varphi = kv(x)\varphi$$

（すなわち $\Psi(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\varphi$）とおくことで

$$\omega = kv(\mu), \quad \varphi = \delta(x-\mu), \tag{14}$$

と表される．ここで，μ は任意の実数，δ は Dirac のデルタ関数である．したがって作用素 $kv(x)$ のスペクトルは連続であり，対応する固有関数は特異である．

B.2.2　表面波モデル

(12)式右辺第2項の関数 $w(x)$ について，これを連続関数として計算を進めることは困難であるため，表面波モデルを導入する．$v(x)=0$ とし，$w(x)$ を

$$w(x) = \sum_{j=1}^{N} A_j \delta(x-L_j) \tag{15}$$

とおいて作用素の離散化を行う．ここで導入した表面波（デルタ関数）は，もともとの物理量に戻ると，文献[2]で用いられている区分的線形なプロファイルにおける $v''(x)$ に相当する．

ここでは $N=2$ として

$$w(x) = A[\delta(x-L) - \delta(x+L)] \tag{16}$$

を考える．固有値問題は

$$\omega\varphi(x) = -\frac{A}{2}[\delta(x-L) - \delta(x+L)] \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-k|x-\xi|}\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{17}$$

である．固有値と対応する固有関数はそれぞれ

$$\omega = \pm\frac{A}{2}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-4kL}}, \tag{18}$$

および

$$\varphi(x) = \delta(x-L) - \left(1 \pm \sqrt{1-\mathrm{e}^{-4kL}}\right)\mathrm{e}^{2kL}\delta(x+L) \tag{19}$$

と求められる．

ここで離散化された作用素 $kw(x)\mathcal{K}$ を行列で表すことを考える．基底ベクトルを $\delta(x-L)$ と $\delta(x+L)$ にとると，作用素 $kw(x)\mathcal{K}$ は形式的に

$$kw(x) \sim \frac{A}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\mathrm{e}^{-2kL} \\ \mathrm{e}^{-2kL} & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

と表すことができる．$kv(x)$ による Doppler シフトを対角成分に加えると，

$$kv(x) + kw(x)\mathcal{K} \sim \frac{U}{2L}\begin{bmatrix} 2kL-1 & -\mathrm{e}^{-2kL} \\ \mathrm{e}^{-2kL} & -(2kL-1) \end{bmatrix} \tag{21}$$

となり，この行列の固有値は Kelvin-Helmholtz 不安定性を与える．ここで U は Doppler シフトの大きさを表し，$A = U/L$ とした．

B.3　冪零と共鳴

さて，速度プロファイルを

$$v(x) = \begin{cases} Ux/L & (x < L) \\ U & (L \le x) \end{cases} \tag{22}$$

と与え，辻褄が合うように $w(x) = v''(x)$ と取ろう（Fig. 2）．

このプロファイルは $x = L$ にデルタ関数で表される表面波成分 $v''(x) = (U/L)\delta(x-L)$ を伴う．$x = -L$ に反対向きの $v''(x)$ を置けば $x < -L$ での速度が一定になり，これは文献[2]で扱われている Kelvin-Helmholtz 不安定性を与える速度プロファイルである［成長率は(21)の行列の固有値で与えられる］．

固有値方程式は

$$\omega\varphi(x) = \mathcal{L}\varphi(x) = kv(x)\varphi(x) - \frac{U}{2L}\delta(x-L)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-k|x-\xi|}\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

であるが，この系には2種類の固有関数が存在する．一つは表面波に相当する点スペクトルであり，固有値は

$$\omega_1 = kU - \frac{U}{2L}, \tag{23}$$

対応する固有関数は

$$\varphi_1 = \delta(x-L) \tag{24}$$

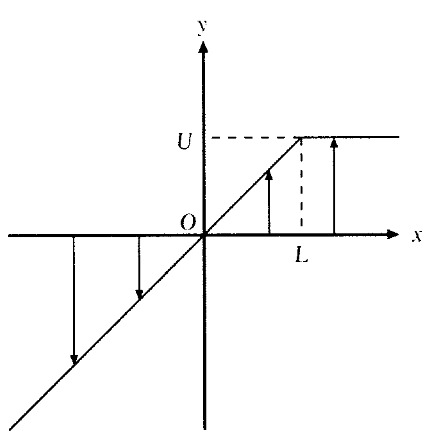

Fig. 2　Piece-wise linear velocity profile.

である．もう一つは流れによる連続スペクトルであり，固有値と対応する固有関数はそれぞれ

$$\omega_\mu = \frac{kU}{L}\mu, \tag{25}$$

および

$$\varphi_\mu = \delta(x-\mu) + \frac{\mathrm{e}^{-k(L-\mu)}}{2k(L-\mu)-1}\delta(x-L) \tag{26}$$

である．ここで注意しなければならないのは $\mu \neq \mu_0 := L - 1/2k$ になることである．なぜなら $\mu = \mu_0$ のとき，固有関数(26)の第２項が発散し，連続スペクトルに属する固有関数は点スペクトルに対応する固有関数(24)に縮退するからである．同時に固有値(25)も点スペクトルのもの(23)に縮退する：

$$\omega_{\mu_0} = \omega_1. \tag{27}$$

したがってこれらだけでは $\delta(x-\mu_0)$ の自由度が失われてしまい，完全解が得られたとは言えない．Jordan 行列の場合と同じように，縮退した周波数スペクトルに隠れた自由度（広義固有関数）が存在するのである．

作用素 $\mathcal{L}$ の広義固有関数として発見的に

$$\varphi_2 = \delta(x-\mu_0) \tag{28}$$

と取ってみると，

$$(\omega_1 - \mathcal{L})\varphi_2 = \frac{U}{2L}\mathrm{e}^{-k(L-\mu_0)}\varphi_1, \tag{29}$$

$$(\omega_1 - \mathcal{L})^2\varphi_2 = 0. \tag{30}$$

(28)が確かに広義固有関数になっていることがわかる．形式的に φ_2 に点スペクトルの自由度を与え，初期値を φ_2 に取って時間発展を追ってみよう．渦度 Ψ を φ_1 と φ_2 に分けて

$$\Psi(x,t) = \sum_{j=1}^{2} a_j(t)\varphi_j(x) \tag{31}$$

とし，これを発展方程式(９)に代入すると

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\omega_1 a_1 + \mathrm{i}\frac{U}{2L\sqrt{\mathrm{e}}}a_2, \tag{32}$$

$$\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\omega_1 a_2. \tag{33}$$

したがって解は

$$a_1(t) = \left[\mathrm{i}\frac{U}{2L\sqrt{\mathrm{e}}}a_2(0)\,t + a_1(0)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t}, \tag{34}$$

$$a_2(t) = a_2(0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t} \tag{35}$$

と求められる．表面波 a_1 は $t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t}$ にしたがって secular に成長する．

B.4 プロパゲータの表現

前節での形式的な計算を数学的に定式化しよう．ヒルベルト空間を

$$V = \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}) \tag{36}$$

として，V の要素を

$$\Psi = \begin{bmatrix} a(t) \\ f(x,t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \Psi(x,t) = a(t)\,\delta(x-L) + f(x,t) \tag{37}$$

と書くことにする．このとき２種類の固有関数は，$\mu = \mu_0$ も含めて次のように書ける．

$$\omega_1 = kU - \frac{U}{2L}, \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{38}$$

$$\omega_\mu = \frac{kU}{L}\mu, \quad \tilde{\varphi}_\mu = \begin{bmatrix} kAK(L,\mu) \\ m(\mu)\,\delta(x-\mu) \end{bmatrix} \tag{39}$$

ただし

$$\rho(\mu) = \begin{cases} 1 & (\omega_\mu - \omega_1 = 0) \\ 0 & (\omega_\mu - \omega_1 \neq 0) \end{cases} \tag{40}$$

$$m(\mu) = \omega_\mu - \omega_1 + \rho(\mu) \tag{41}$$

である．

線形代数理論とのアナロジーから，変換行列

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \left[\varphi_1 \int (\cdot, \delta(x-\mu))\,\tilde{\varphi}_\mu \mathrm{d}\mu\right] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \int kAK(L,x)\cdot\mathrm{d}x \\ 0 & m(x) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{42}$$

によって生成作用素は標準形

$$\mathcal{T}^{-1}\mathcal{L}\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \omega_1 & \int \rho(x)\cdot\mathrm{d}x \\ 0 & \omega_x \end{bmatrix} \tag{43}$$

に変形され，プロパゲータは

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mathcal{L}} = \mathcal{T}\,[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\,\mathcal{T}^{-1}\mathcal{L}\mathcal{T}}]\gamma^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t} & X \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_x t} \end{pmatrix} \tag{44}$$

と表現される．ただし，

$$X = \int \left[(1-\rho\,(x))\frac{[\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_x t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t}\,]kAK\,(L,x)}{\omega_x - \omega_1} - \mathrm{i}t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t} kAK\,(L,x)\,\rho\,(x) \right] \cdot \mathrm{d}x \tag{45}$$

である．このプロパゲータを用いて，任意の初期値 $\Psi\,(x,0)$（$\in V$）に関する初期値問題が解ける：

$$\Psi\,(x,t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\,\mathcal{L}}\Psi\,(x,0). \tag{46}$$

参 考 文 献

［1］K. Yosida, *Functional Analysis* (Springer-Verlag, Berlin, 1995).

［2］J.W.S. Rayleigh, Proc. London Math. Soc. **9**, 57 (1880).

［3］G.I. Taylor, Proc. Roy. Soc. London A **132**, 499 (1931); S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Clarendon, Oxford, 1961).

［4］神部　勉，P.G.ドレイジン：流体力学安定性と乱流（東京大学出版会，1998）.